

RESISTENCIA DE MATERIALES

William A. Nash





RESISTENCIA DE MATERIALES

WILLIAM A. NASH, Ph. D.

Professor of Civil Engineering
University of Massachusets,
Amherst, Mass.

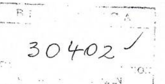
•

TRADUCCION Y ADAPTACION

MARIANO BARATECH ZALAMA

FRANCISCO BARATECH ZALAMA

Ingenieros de Construcción
Licenciados en Ciencias



McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

RESISTENCIA DE MATERIALES

Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

ISBN 968-422-922-4

Traducido de la segunda edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF STRENGTH OF MATERIALS

ISBN 0-07-045894-4

9012345678 P.E-91 9087543216

Impreso en Chile - Printed in Chile

Andros Impresores

Prólogo

Aunque algunos de los fundamentos de la estática de los cuerpos rígidos eran ya conocidos por los científicos de la antigua Grecia, no se prestó atención seria al problema de las deformaciones ni aun de las estructuras más sencillas hasta los tiempos del Renacimiento. Entonces, Leonardo da Vinci (1452-1519) y más tarde Galileo (1564-1642) se interesaron en la estática de los cuerpos deformables y en las propiedades mecánicas de los materiales corrientes de la ingeniería. El libro de Galileo *Dos nuevas ciencias* contiene el primer estudio escrito de las propiedades de los materiales estructurales, así como las primeras consideraciones sobre la resistencia de las vigas. Aunque algunas de las conclusiones de Galileo no están de acuerdo con las ideas modernas, su trabajo estimuló considerablemente el interés en este nuevo campo. En 1678 Robert Hooke (1635-1702) formuló su famosa y sobre manera sencilla relación entre la fuerza y deformación, que ha influido quizá más que ningún otro factor en el desarrollo de la teoría de la resistencia de materiales. La ley de proporcionalidad entre deformación y fuerza, de Hooke, simplificó tanto el estudio matemático, que desde entonces el progreso en este campo fue muy rápido. Jacob Bernoulli (1654-1705) determinó la ecuación diferencial de una barra cargada lateralmente, y más tarde Leonard Euler (1707-1783) continuó el estudio de la flexión en las vigas e investigó también el pandeo de una barra comprimida axialmente. El primer estudio extenso de las tensiones en las fibras de una viga cargada lateralmente fue presentado en 1776 por Coulomb (1736-1806) y más tarde el mismo autor estableció los fundamentos de la teoría de la torsión en las barras. Navier (1785-1836) aclaró más el problema de la flexión en las vigas, y quizá pueda decirse que Coulomb y Navier son principalmente responsables de la elaboración de las materias que hoy llamamos resistencia de materiales.

Cronológicamente, el desarrollo de la resistencia de materiales ocurrió casi totalmente después del desarrollo de las leyes de la estática. La estática consideraba los efectos externos de una fuerza que actúa sobre un cuerpo, esto es, la tendencia de las fuerzas a cambiar el estado de movimiento del cuerpo. La resistencia de materiales trata de los efectos internos de la fuerza, es decir, el estado de tensión y deformación producido dentro de los límites del cuerpo. En breve, la resistencia de materiales da una explicación más amplia del comportamiento de los sólidos bajo una carga, de la que el estudiante ha considerado antes. Aun así hay muchos problemas importantes que quedan fuera del objeto de un curso de pregraduados sobre esta materia y que se reservan para los tratados más complicados para cursos de graduados, bajo los nombres de teoría de la elasticidad, teoría de la estabilidad elástica, teoría de la plasticidad, teoría del medio continuo, y numerosos más. La materia presentada en muchos de esos cursos para graduados es requisito previo para resolver un número siempre creciente de complicados problemas de diseño para la industria, y aún más necesario para la investigación.

Este libro trata de suplementar a los textos normales, ayudando principalmente a los estudiantes a adquirir un conocimiento y pericia más completos en este campo fundamental. El contenido se divide en capítulos que comprenden campos debidamente reconocidos de la teoría y el estudio. Cada capítulo comienza con un resumen de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, seguido de un conjunto graduado de problemas resueltos y suplementarios. La deducción de las fórmulas y la demostración de los teoremas están incluidas en los problemas resueltos. Se han elegido éstos y se ha dispuesto su resolución de modo que queden claramente establecidos los principios. Sirven para aclarar y ampliar la teoría, proporcionan la repetición de los principios básicos, tan vital para una enseñanza eficaz, y ponen de manifiesto aquellos puntos importantes sin los cuales el estudiante se encuentra desprovisto de una base firme.

El autor se siente profundamente deudor de su esposa, Verna B. Nash, por su inspiración y continua ayuda al leer las pruebas y en la preparación del manuscrito. También agradece a Mr. Roy W. Gregory el laborioso trabajo de dibujar todas las figuras y a Mr. Henry Hayden la ayuda técnica y los arreglos tipográficos. La gratitud se extiende especialmente al profesor Odd Albert del Instituto Politécnico de Brooklyn por las numerosas y valiosas sugerencias y la revisión crítica de todo el manuscrito.

WILLIAM A. NASH

Tabla de materias

CAPITULO 1

Tracción y compresión

EFECTOS INTERNOS DE LAS FUERZAS

En este libro trataremos principalmente de lo que podríamos llamar efectos *internos* de las fuerzas que actúan en un cuerpo. Ya no consideraremos a los cuerpos perfectamente rígidos como suponíamos en la estática, sino que uno de los principales objetivos de este estudio sobre la resistencia de materiales será el cálculo de las deformaciones de cuerpos de diversas formas bajo distintas cargas.

BARRA CARGADA AXIALMENTE. Probablemente, el caso más sencillo que se puede considerar para empezar es el de una barra metálica inicialmente recta, de sección constante, sometida en sus extremos a dos fuerzas colineales dirigidas en sentidos opuestos y que actúan en el centro de las secciones. Para que haya equilibrio estático, las magnitudes de las fuerzas deben ser iguales. Si están dirigidas en sentido de alejarse de la barra, se dice que ésta está sometida a *tracción*, mientras que si actúan hacia la barra, existe un estado de *compresión*. En la Fig. 1 están representados los dos casos. Bajo la acción de estas dos fuerzas aplicadas se originan otras fuerzas internas dentro de la barra, que pueden estudiarse imaginando un plano que la corte en un punto cualquiera y sea perpendicular a su eje longitudinal. En la Fig. 2*a* se designa este plano por *a-a*. Por razones que se estudiarán más tarde, el plano no deberá estar «demasiado cerca» de ninguno de los extremos de la barra. Si suponemos, para el estudio, que se quita la parte de barra situada a la derecha del plano, como en la Fig. 2*b*, deberá sustituirse por el efecto que ejerce sobre la parte izquierda. Por este procedimiento de considerar el corte por un plano, las fuerzas que eran internas originalmente se convierten en externas respecto a la parte de cuerpo que queda. Para que exista equilibrio en la parte de la izquierda, este «efecto» debe ser una fuerza horizontal de magnitud P, aunque esta fuerza que actúa normalmente a la sección *a-a* es, en realidad, la resultante de las fuerzas repartidas que actúan en dicha sección en sentido perpendicular a ella.

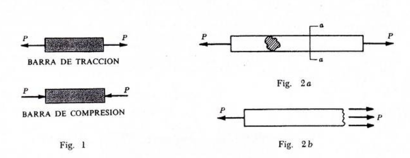


Fig. 1

Fig. 2*a*

Fig. 2*b*

DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS RESISTENTES. Llegados a este punto, es necesario hacer alguna hipótesis sobre el modo en que varían estas fuerzas repartidas, y como la fuerza aplicada P actúa en el centro, se suele admitir que son uniformes en toda la sección. Esta distribución probablemente no se dará nunca exactamente, a consecuencia de la orientación caprichosa de los granos cristalinos de que está compuesta la barra; el valor exacto de la fuerza que actúa en cada elemento de la sección transversal es función de la naturaleza y la orientación de la estructura cristalina en ese punto, pero para el conjunto de la sección la hipótesis de una distribución uniforme da una exactitud aceptable desde el punto de vista de la ingeniería.

TENSION NORMAL. En lugar de hablar de la fuerza interna que actúa sobre un elemento de superficie, probablemente es más significativo y más útil para la comparación considerar la fuerza normal que actúa sobre una superficie *unidad* de la sección transversal. La intensidad de la fuerza normal por unidad de superficie se llama *tensión* normal y se mide en unidades de fuerza por unidad de superficie, kg/cm^2. A veces se usa la expresión *tensión total* para expresar la fuerza resultante axial total, en kilogramos. Si las fuerzas aplicadas a los extremos de la barra son tales que ésta está sometida a tracción, se establecen *tensiones de tracción* en la misma; si está sometida a compresión, tenemos *tensiones de compresión*. Es esencial que la línea de aplicación de las fuerzas pase por el centro de cada sección transversal de la barra.

PROBETAS DE ENSAYO. La carga axial representada en la Fig. 2*a* es frecuente en los problemas de diseño de estructuras y de máquinas. Para simular esta carga en el laboratorio se coloca una probeta entre las mordazas de una máquina de ensayos del tipo accionado eléctricamente o de una hidráulica, máquinas usadas corrientemente en los laboratorios de ensayo de materiales para aplicar una tracción axial.

En un intento de tipificar los métodos de ensayo, la Sociedad Americana de Ensayos de Materiales, comúnmente conocida por A. S. T. M., ha redactado especificaciones que son de uso común en USA y numerosos países de América y Europa. Se prescriben varios tipos de probetas para materiales metálicos y no metálicos, tanto para ensayos de tracción como de compresión, pero solo mencionaremos ahora dos de ellos, uno para chapas metálicas de espesor mayor de 3/16 de pulgada (unos 47 mm) que aparece en la Fig. 3, y otro para metales de espesor mayor de 1,5 pulgadas y que tiene el aspecto que aparece en la Fig. 4. Las dimensiones indicadas son las especificadas por la A. S. T. M., pero los extremos de las probetas pueden tener cualquier forma que se adapte a las mordazas de la máquina de ensayo que aplique la carga axial. Como se puede ver en las figuras, la parte central de la probeta es algo más delgada que las extremas para que no se produzca el fallo en la parte de las mordazas. Los chaflanes redondeados que se observan tienen por objeto evitar que se produzcan las llamadas concentraciones de esfuerzos en la transición entre las dos anchuras diferentes. De ordinario, se marca una longitud standard patrón en la que se miden los alargamientos, perforando dos pequeños orificios en la superficie de la barra con una separación de 2 o de 8 pulgadas, como puede verse.

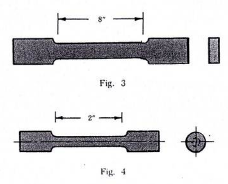


Fig. 3

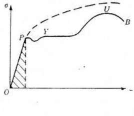
Fig. 4

DEFORMACION NORMAL. Supongamos que se ha colocado una de estas probetas de tracción en una máquina de ensayos de tracción y compresión, y se aplican gradualmente en los extremos fuerzas de tracción. Se puede medir el alargamiento total en la longitud patrón para cualquier incremento predeterminado de la carga axial por medio de un aparato de medida mecánico y hallar, a partir de estos valores, el alargamiento por unidad de longitud llamado *deformación normal* y representado por ϵ, dividiendo el alargamiento total Δ por la longitud patrón L, es decir $\epsilon = \Delta/L$. Generalmente se expresa la deformación en centímetros por centímetros, por lo que es adimensional. A veces se usa la expresión *deformación total* para indicar el alargamiento en centímetros.

CURVA TENSION-DEFORMACION. Cuando se aumenta gradualmente la carga axial por incrementos de carga, se mide el alargamiento de la longitud patrón para cada incremento, continuando de este modo hasta que se produce la rotura de la probeta. Conociendo el área original de la sección transversal de la probeta puede obtenerse la *tensión normal*, representada por σ, para cada valor de la carga axial, simplemente utilizando la relación

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

donde P representa la carga axial en kilogramos y A el área primitiva de la sección transversal. Con varios pares de valores de la tensión normal σ y de la deformación normal ϵ podemos representar gráficamente los datos experimentales tomando estas cantidades como ordenadas y abscisas, respectivamente. Así se obtiene un *diagrama tensión-deformación* del material para este tipo de carga. Este diagrama puede adoptar numerosas formas; en la Fig. 5 se representan varios gráficos típicos de materiales usados normalmente en ingeniería. Para un metal como el acero estructural de bajo contenido en carbono, '-s datos se agrupan aproximadamente como se indica en la Fig. 5*a*; para un material de los llamados frágiles como la fundición, el gráfico aparece como en la Fig. 5*b*, mientras que para la goma es típico el diagrama 5*c*.



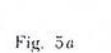


Fig. 5*a*

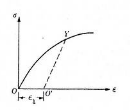


Fig. 5*b*

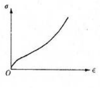


Fig. 5*c*

MATERIALES DUCTILES Y FRAGILES. Los materiales metálicos usados en la ingeniería se clasifican generalmente en *dúctiles* y *frágiles*. Un *material dúctil* es el que tiene un alargamiento a tracción relativamente grande hasta llegar al punto de rotura (por ejemplo, el acero estructural o el aluminio), mientras que un *material frágil* tiene una deformación relativamente pequeña hasta el mismo punto. Frecuentemente se toma como línea divisoria entre las dos clases de materiales un alargamiento arbitrario de 0,05 cm/cm. La fundición y el hormigón son ejemplos de materiales frágiles.

LEY DE HOOKE. Para un material cuya curva tensión-deformación es similar a la de la Fig. 5*a* resulta evidente que la relación entre tensión y deformación es lineal para los valores relativamente bajos de la deformación. Esta relación lineal entre el alargamiento y la fuerza axial que lo produce (pues cada una de estas cantidades difiere solo en una constante de la deformación y la tensión,

respectivamente) fue observada por primera vez por sir Robert Hooke en 1678 y lleva el nombre de *ley de Hooke*. Por tanto, para describir esta zona inicial del comportamiento del material, podemos escribir

$$\sigma = E\epsilon$$

donde E representa la pendiente de la parte recta (OP) de la curva tensión-deformación de la Figura 5*a*.

MODULO DE ELASTICIDAD. La cantidad E, es decir, la relación de la tensión unitaria a la deformación unitaria se suele llamar *módulo de elasticidad* del material en tracción o, a veces, *módulo de Young*. En los manuales aparecen tabulados los valores de E para diversos materiales usados en la ingeniería. Como la deformación unitaria ϵ es un número abstracto (relación entre dos longitudes) es evidente que E tiene las mismas unidades que la tensión, por ejemplo, kg/cm^2. Para muchos de los materiales usados en la ingeniería el módulo de elasticidad en compresión es casi igual al encontrado en tracción. Hay que tener muy en cuenta que el comportamiento de los materiales bajo una carga, tal como se estudia en este libro, se limita (si no se dice lo contrario) a esa región lineal de la curva tensión-deformación.

PROPIEDADES MECANICAS DE LOS MATERIALES

La curva tensión-deformación de la Fig. 5*a* se puede usar para determinar varias características de resistencia del material. Estas son:

LIMITE DE PROPORCIONALIDAD. A la ordenada del punto P se le conoce por *límite de proporcionalidad*, esto es, la máxima tensión que se puede producir durante un ensayo de tracción simple de modo que la tensión sea función lineal de la deformación. Para un material que tenga la curva tensión-deformación como la representada en la Fig. 5*b* no existe límite de proporcionalidad.

LIMITE ELASTICO. La ordenada de un punto que casi coincide con P se conoce por *límite elástico*, esto es, la tensión máxima que puede producirse durante un ensayo de tracción simple de modo que no haya deformación permanente o residual cuando se suprime totalmente la carga. Para muchos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces se consideran sinónimos. En los casos en que es notoria la diferencia, el límite elástico es casi siempre mayor que el de proporcionalidad.

ZONA ELASTICA. La región de la curva tensión-deformación que va desde el origen hasta el límite de proporcionalidad.

ZONA PLASTICA. La región de la curva tensión-deformación que va desde el límite de proporcionalidad hasta el punto de rotura.

LIMITE ELASTICO APARENTE O DE FLUENCIA. A la ordenada del punto Y en el que se produce un aumento de deformación sin aumento de tensión se le conoce por *límite elástico aparente* o *límite de fluencia* del material. Cuando la carga ha aumentado hasta el punto Y, se dice que se produce fluencia. Algunos materiales presentan en la curva tensión-deformación dos puntos en los que hay aumento de deformación sin que aumente la tensión. Se les conoce por *límites de fluencia superior e inferior*.

RESISTENCIA A TRACCION. La ordenada del punto U, máxima de la curva, se llama *resistencia a tracción* o, a veces, *resistencia última* del material.

RESISTENCIA DE ROTURA. La ordenada del punto B se llama *resistencia de rotura* del material.

MODULO DE RESILIENCIA. El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta un valor tal que se alcance el límite de proporcionalidad del material, se define como *módulo de resiliencia*. Puede calcularse por el área bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta el límite de proporcionalidad y se representa por la superficie rayada en la Fig. 5*a*. Las unidades en que se mide son kg/cm^3. Así, pues, la resiliencia de un material es su capacidad de absorber energía en la zona elástica.

MODULO DE TENACIDAD. El trabajo realizado en un volumen unidad de material, cuando se aumenta una fuerza de tracción simple gradualmente desde cero hasta el valor que produce la rotura, se define como *módulo de tenacidad*. Puede calcularse por el área total bajo la curva tensión-deformación desde el origen hasta la rotura. La tenacidad de un material es su capacidad de absorber energía en la zona plástica del material.

ESTRICCION. La relación entre la disminución del área de la sección transversal respecto a la primitiva en la fractura, dividida por el área *primitiva* y multiplicada por 100, se llama *estricción*. Hay que observar que cuando actúan fuerzas de tracción en una barra disminuye el área de la sección transversal, pero generalmente se hacen los cálculos de las tensiones en función del área primitiva, como en el caso de la Fig. 5*a*. Cuando las deformaciones se hacen cada vez mayores, se más interesante considerar los valores instantáneos del área de la sección transversal (que son decrecientes), con lo cual se obtiene la curva tensión-deformación *verdadera*, que tiene el aspecto de la línea de trazos de la Figura 5*a*.

ALARGAMIENTO DE ROTURA. La relación entre el aumento de longitud (de la longitud patrón) después de la fractura y la longitud inicial, multiplicada por 100, es el *alargamiento de rotura*. Se considera que tanto la estricción como el alargamiento de rotura son medidas de la *ductilidad* del material.

TENSION DE TRABAJO. Se pueden usar las características de resistencia que se acaban de mencionar para elegir la llamada *tensión de trabajo*. En este libro, todas las tensiones de trabajo estarán dentro de la zona elástica del material. Frecuentemente, esta tensión se determina simplemente dividiendo la tensión en la fluencia o rotura por un número llamado *coeficiente de seguridad*. La elección del coeficiente de seguridad se basa en el buen juicio y la experiencia del proyectista. A veces se especifican en los reglamentos de la construcción valores de determinados coeficientes de seguridad. Véanse los Problemas 4, 12 y 13.

La curva tensión-deformación no lineal de un material frágil, representada en la Fig. 5*b*, caracteriza otras varias medidas de la resistencia que no se pueden definir si la mencionada curva tiene una zona lineal. Estas son:

LIMITE ELASTICO CONVENCIONAL. La ordenada de la curva tensión-deformación para la cual el material tiene una deformación permanente predeterminada cuando se suprime la carga se llama *límite elástico convencional* del material. Se suele tomar como deformación permanente 0,002 o 0,0035 cm por cm; pero estos valores son totalmente arbitrarios. En la Fig. 5*b* se ha representado una deformación permanente ϵ_1 en el eje de deformaciones y se ha trazado la recta $O'Y$ paralela a la tangente inicial a la curva. La ordenada de Y representa el límite elástico convencional del material, llamado a veces *tensión de prueba*.

MODULO TANGENTE. A la pendiente de la tangente a la curva tensión-deformación en el origen se la conoce por *módulo tangente del material.*

Hay otras características de un material que son útiles para los proyectos, que son las siguientes:

COEFICIENTE DE DILATACION LINEAL. Se define como la variación por unidad de longitud de una barra recta sometida a un cambio de temperatura de un grado. El valor de este coeficiente es independiente de la unidad de longitud, pero depende de la escala de temperatura empleada. Consideraremos la escala centígrada, para la cual el coeficiente que se representa por α es para el acero, por ejemplo, 11×10^{-6} por °C. Las variaciones de temperatura en una estructura dan origen a tensiones internas del mismo modo que las cargas aplicadas. Véanse los Problemas 5 y 8.

RELACION DE POISSON. Cuando una barra está sometida a una carga de tracción simple se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a ésta. La relación entre la deformación en la dirección lateral y la de la dirección axial se define como *relación de Poisson*. La representaremos por la letra griega μ. Para la mayoría de los metales está entre 0,25 y 0,35. Véanse los Problemas 16, 17, 18, 19 y 20.

FORMA GENERAL DE LA LEY DE HOOKE. Se ha dado la forma simple de la ley de Hooke para tracción axial cuando la carga está totalmente según una recta, esto es, es uniaxial. Se consideró solamente la deformación en la dirección de la carga y se dijo que era

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

En el caso más general, un elemento de material está sometido a tres tensiones normales perpendiculares entre si, σ_x, σ_y, σ_z, acompañadas de tres deformaciones ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, respectivamente. Superponiendo las componentes de la deformación originada por la contracción lateral debida al efecto de Poisson a las deformaciones directas, obtenemos el enunciado general de la ley de Hooke:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Véanse los Problemas 17 y 20.

CLASIFICACION DE LOS MATERIALES

Toda la discusión se ha basado en la suposición de que prevalecen en el material dos características, esto es, que tenemos un

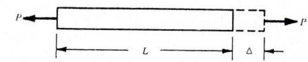
MATERIAL HOMOGENEO, que tiene las mismas propiedades elásticas (E, μ) en todos los puntos del cuerpo, y un

MATERIAL ISOTROPO, que tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones en cada punto del cuerpo. No todos los materiales son isótropos. Si un material no tiene ninguna clase de simetría elástica se llama *anisótropo* o, a veces, *aeolotrópico*. En lugar de tener dos constantes elásticas independientes (E, μ) como un material isótropo, esta sustancia tiene 21 constantes elásticas. Si

el material tiene tres planos de simetría elástica perpendiculares entre sí dos a dos se dice que es *ortotrópico*, en cuyo caso el número de constantes independientes es 9. En este libro se estudian solamente los materiales isótropos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el alargamiento total de una barra recta inicialmente de longitud L, área de la sección transversal A y módulo de elasticidad E, si actúa en sus extremos una carga de tracción P.



La tensión unitaria en la dirección de la fuerza P no es más que la carga dividida por la sección, esto es, $\sigma = P/A$. De igual modo, la deformación unitaria ϵ viene dada por el cociente del alargamiento total Δ dividido por la longitud inicial, esto es, $\epsilon = \Delta/L$. Por definición, el módulo de elasticidad es la relación entre σ y ϵ, es decir,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} = \frac{PL}{A\Delta} \quad \text{o} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

Obsérvese que Δ tiene unidades de longitud, seguramente centímetros o metros.

2. Una cinta de agrimensor, de acero, de 25 m de longitud tiene una sección de 6 mm por 0,8 mm. Determinar el alargamiento cuando se estira toda la cinta y se mantiene tirante bajo una fuerza de 6 kg. El módulo de elasticidad es $2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm².

$$\text{Alargamiento } \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(6)(2.500)}{(0{,}6)(0{,}08)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}15 \text{ cm}$$

3. Una barra de acero de 5 cm² de sección está sometida a las fuerzas representadas en la Fig. (*a*). Determinar el alargamiento total de la barra. Para el acero $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm².

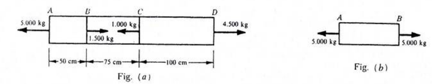


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

Toda la barra está en equilibrio, por lo que cada una de sus partes lo está también. El trozo de barra entre A y B tiene una fuerza resultante de 5.000 kg que actúa sobre cada sección transversal, por lo que un diagrama de cuerpo en libertad de esos 50 cm es como aparece en la Fig. (*b*). Para conservar el equilibrio con la fuerza aplicada al extremo izquierdo, la del extremo derecho ha de ser de 5.000 kg. El alargamiento de este trozo viene dado por

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{5.000(50)}{(5)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}024 \text{ cm}$$

La fuerza que actúa en el trozo entre B y C se halla considerando la suma algebraica de las fuerzas situadas a la izquierda de una sección situada entre esos puntos, lo que indica que actúa una fuerza resultante de 3.500 kg hacia la izquierda, por lo que la sección está sometida a tracción. Indudablemente, podríamos haber llegado al mismo resultado considerando las fuerzas situadas a la derecha de esa sección. Como consecuencia, se obtiene el diagrama de cuerpo en libertad dado en la Figura (*c*).

El alargamiento de este trozo viene dado por $\Delta_2 = \dfrac{3.500(75)}{(5)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}025$ cm.

Del mismo modo, la fuerza que actúa sobre cualquier sección entre C y D ha de ser de 4.500 kg para mantener el equilibrio con la carga aplicada en D. En la Fig. (*d*) aparece el diagrama de cuerpo en libertad del segmento CD.

Fig. (*c*)

Fig. (*d*)

El alargamiento de esta parte viene dado por $\Delta_3 = \dfrac{(4.500)(100)}{(5)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}043$ cm.

Por consiguiente, el alargamiento total es $\Delta = 0{,}024 + 0{,}025 + 0{,}043 = 0{,}092$ cm.

4. La armadura Howe de la Fig. (*a*) soporta la carga única de 60.000 kg. Si se toma como carga de trabajo a tracción del material 1.200 kg/cm², determinar la sección necesaria de las barras DE y AC. Hallar el alargamiento de la barra DE en toda su longitud de 6 m. Se supondrá que el único factor a considerar para determinar el área buscada es el valor límite de la tensión de trabajo a tracción. Tomar como módulo de elasticidad de la barra $2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm².

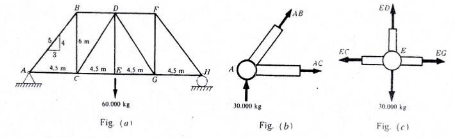


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

Esta armadura es estáticamente determinada exterior e interiormente, esto es, se pueden determinar las reacciones en los apoyos por medio de las ecuaciones del equilibrio estático, y se puede hallar la fuerza axial en cada barra por un estudio estático simple.

Primeramente es necesario determinar las reacciones verticales en A y H. Por simetría, son de 30.000 kg cada una. En la Fig. (*b*) aparece un diagrama del nudo A como cuerpo en libertad. En ella se han expresado las fuerzas desconocidas en las barras por la misma designación de dichas barras, AB y AC, y se ha supuesto que se trata de tracciones, por lo que si se halla para ellas valores positivos serán realmente fuerzas de tracción, mientras que si son negativas se tratará de compresiones, estando así los signos de acuerdo con el criterio habitual de suponer positivas las tracciones y negativas las compresiones. Aplicando la ecuación del equilibrio estático al diagrama de cuerpo en libertad anterior, tenemos

$$\Sigma F_v = 30.000 + \frac{4}{5}(AB) = 0 \qquad \text{o} \qquad AB = -37.500 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_h = \frac{3}{5}(-37.500) + AC = 0 \qquad \text{o} \qquad AC = 22.500 \text{ kg}$$

De igual modo, en la Fig. (*c*) aparece un diagrama de cuerpo en libertad del punto E. De la estática, tenemos

$$\Sigma F_v = ED - 60.000 = 0 \qquad \text{o} \qquad ED = 60.000 \text{ kg}$$

La consideración simple de las armaduras utilizada aquí supone que todas las barras son elementos de los que podrían llamarse de dos fuerzas, esto es, sometidos a tracción o compresión axiales, sin ninguna otra carga.

Para la carga axial, la tensión viene dada por $\sigma = P/A$, donde P es la fuerza axial y A la sección de la barra. En nuestro caso, la tensión es de 1.200 kg/cm² en cada barra, por lo que las secciones serán

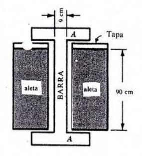
$$A_{DE} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_{AC} = \frac{22.500}{1.200} = 18{,}75 \text{ cm}^2$$

El alargamiento de la barra bajo la tracción axial viene dado por $\Delta = \dfrac{PL}{AE}$. Para la barra DE tenemos

$$\Delta = \frac{(60.000)(600)}{(50)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}34 \text{ cm}$$

5. En un dispositivo de cierre para asegurar la tapa de un depósito cilíndrico que contiene fluido a presión se ha usado una serie de barras prismáticas de sección rectangular de 5 × 9 cm. La pared exterior del depósito de presión tiene unas aletas salientes soldadas a ella, encajando las barras prismáticas (en sentido lateral) entre dos aletas contiguas. Para asegurar el efecto de fijación, la barra está mecanizada de modo que es demasiado corta en sus cabezas (A) para encajar sobre la tapa del depósito, que apoya en la parte superior de las aletas. A la temperatura ambiente le faltan 25 mm. Se calienta la barra (pero no las aletas) de forma que pueda deslizar sobre la parte superior del depósito, y después de enfriarse ejerce una fuerza normal a dicha parte superior.

Si la superficie total de apoyo en cada extremo de la barra (superficie en contacto con la parte superior del depósito) es de 45 cm², hallar la presión unitaria que ejerce cada barra sobre el depósito, así como la temperatura a que habría que calentarlas para que entrasen justo en la tapa. Las barras son de acero, para el cual $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°C$.



$$0{,}25 = (11 \times 10^{-6})(90)(\Delta T), \quad \text{de donde} \quad \Delta T = 252°$$

La fuerza axial necesaria para alargar la barra esta misma cantidad es P, siendo

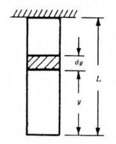
$$0{,}25 = \frac{P(90)}{(45)(2{,}1 \cdot 10^6)} \quad \text{y} \quad P = 262.500 \text{ kg}$$

Se supone que la presión está uniformemente repartida sobre la superficie de apoyo entre la cabeza y la parte superior del depósito, por lo que dicha presión es

$$\frac{262.500}{45} = 5.800 \text{ kg/cm}^2$$

6. Determinar el aumento total de longitud de una barra de sección constante, colgada verticalmente y sometida como única carga a su propio peso. La barra es recta inicialmente.

La tensión normal (tracción) en una sección horizontal está producida por el peso de material situado debajo de esa sección. El alargamiento del elemento dy de la figura es



$$d\Delta = \frac{(Ay\gamma)\,dy}{AE}$$

donde A representa la sección de la barra y γ su peso específico (peso/volumen unidad). Integrando, el alargamiento total de la barra es

$$\Delta = \int_0^L \frac{Ay\gamma\,dy}{AE} = \frac{A\gamma}{AE} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{(A\gamma L)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

donde W indica el peso total de la barra. Hay que observar que el alargamiento total producido por el peso es igual al producido por una carga mitad de dicho peso, aplicada en el extremo.

7. En la construcción de un edificio se usa un cable de acero de 6 mm de diámetro para la elevacion de materiales. Si cuelgan verticalmente 150 m del cable para elevar en su extremo inferior una carga de 200 kg, determinar el alargamiento total del cable. El peso específico del acero es de 0,0078 kg/cm³ y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm².

El alargamiento total es debido en parte a la fuerza aplicada de 200 kg y en parte al peso del cable. El debido a la carga es

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(15.000)}{\frac{\pi}{4}(0,6)^2(2,1 \cdot 10^6)} = 5 \text{ cm}$$

Por el Problema 6, el alargamiento debido al peso del cable es

$$\Delta_2 = \frac{WL}{2AE} = \frac{(\frac{\pi}{4})(0,6)^2(15.000)(0,0078)(15.000)}{2(\frac{\pi}{4})(0,6)^2(2,1 \cdot 10^6)} = 0,4 \text{ cm}$$

Por consiguiente, el alargamiento total es $\Delta = 5 + 0,4 = 5,4$ cm.

8. Un cable recto de aluminio de 30 m de largo está sometido a una tensión de tracción de 700 kg/cm². Determinar el alargamiento total del cable. ¿Qué variación de temperatura produciría este mismo alargamiento? Tomar $E = 7 \cdot 10^5$ kg/cm² y α (coeficiente de dilatación lineal) $= 21,6 \times 10^{-6}$/°C.

El alargamiento total está dado por $\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(700)(3.000)}{7 \cdot 10^5} = 3$ cm.

Un aumento de temperatura de ΔT produciría la misma dilatación. Por tanto,

$$3 = (21,6 \cdot 10^{-6})(3.000)(\Delta T) \quad \text{y} \quad \Delta T = 46° \text{ C}$$

9. Dos barras prismáticas están unidas rígidamente y soportan una carga de 5.000 kg, como se ve en la figura. La barra superior es de acero con una densidad de 0,0078 kg/cm³, una longitud de 10 m y una sección de 60 cm². La inferior es de bronce con densidad 0,008 kg/cm³, una longitud de 6 m y una sección de 50 cm². Para el acero $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm², y para el bronce $E = 9 \times 10^5$ kg/cm². Determinar las tensiones máximas en cada material.

La tensión máxima en el bronce tiene lugar inmediatamente bajo la unión en *B-B*. Allí, la tensión normal vertical es debida al efecto combinado de la carga de 5.000 kg y del peso de toda la barra de bronce situada bajo *B-B*.

El peso de la barra de bronce es

$$W_b = (600)(50)(0,008) = 240 \text{ kg}$$

La tensión en esta sección es $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240}{50} = 105$ kg/cm².

La tensión máxima en la barra de acero se produce en la sección *A-A* de suspensión porque en ella producen tensión normal todo el peso de las barras de acero y de bronce, mientras que en cualquier sección situada más abajo solo actuaría una parte del peso de la barra de acero.

El peso de la barra de acero es

$$W_a = (1.000)(60)(0,0087) = 468 \text{ kg}$$

La tensión en la sección *A-A* es $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240 + 468}{60} = 95$ kg/cm².

10. Una barra troncocónica maciza de sección circular varía uniformemente entre un diámetro menor d y uno mayor D, con longitud L. Determinar el alargamiento debido a una fuerza axial P aplicada en cada extremo. Véase la Figura (a).

La coordenada x indica la distancia de un elemento en forma de disco de espesor dx al extremo menor. Por triángulos semejantes se halla fácilmente para radio de este elemento

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)$$

El alargamiento del elemento discoidal se puede hallar aplicando la fórmula para la carga axial, $\Delta = PL/AE$. Para el elemento, esta expresión se convierte en

$$d\Delta = \frac{P\,dx}{\pi[\frac{d}{2} + \frac{x}{L}(\frac{D-d}{2})]^2 E}$$

El alargamiento de toda la barra se obtiene sumando los de todos los elementos a lo largo de la misma, lo que se consigue integrando. Si expresamos por Δ el alargamiento de toda la barra,

$$\Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{4P\,dx}{\pi[d + \frac{x}{L}(D-d)]^2 E} = \frac{4PL}{\pi D\,dE}$$

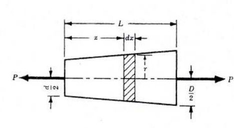


Fig. (a) Prob. 10

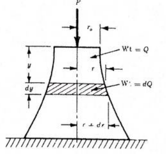


Fig. (b) Prob. 11

11. Un cuerpo con forma de sólido de revolución soporta una carga P, como se ve en la Fig. (b). El radio de la base superior es r_0 y el peso específico del material es γ kg/m³. Determinar cómo debe variar el radio con la altura para que la tensión de compresión sea constante en todas las secciones. El peso del sólido no es despreciable.

Supongamos que se mide y desde la base superior, como se indica en la figura, y representemos por Q el peso de la parte del cuerpo de altura y. Así, dQ representa el incremento de Q en el incremento de altura dy. Sean r y $(r + dr)$ los radios de las superficies superior e inferior, respectivamente, de este elemento horizontal y A y $(A + dA)$ las áreas correspondientes. Considerando las tensiones de compresión normales que actúan sobre las dos caras de este elemento, tenemos

$$\frac{P+Q}{A} = \frac{P+Q+dQ}{A+dA} = \sigma = \text{constante}$$

de donde (1) $$\frac{dA}{dQ} = \frac{A}{P+Q} = \frac{1}{\sigma}$$

El incremento de área entre las caras superior e inferior del elemento es

$$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr$$

El incremento de peso es $dQ = \pi r^2 \gamma (dy)$.

Por consiguiente, de (1), $\frac{2\pi r(dr)}{\pi r^2 \gamma(dy)} = \frac{1}{\sigma}$ e integrando, $2 \log r = (\frac{\gamma}{\sigma})y + C_1$.

Aplicando la condición en el límite, $r = r_0$ cuando $y = 0$, hallamos $C_1 = 2 \log r_0$.

Del mismo modo, de las condiciones en la base superior, $\sigma = \frac{P}{\pi r_0^2}$, y finalmente, $r = r_0 e^{(\frac{\gamma \pi r_0^2 y}{2P})}$

12. Dos barras de acero idénticas están unidas por medio de un pasador y soportan una carga de 50.000 kg, como se muestra en la Fig. (*a*). Hallar la sección de las barras necesaria para que la tensión normal en ellas no sea mayor de 2.100 kg/cm². Hallar también el desplazamiento vertical del punto *B*. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

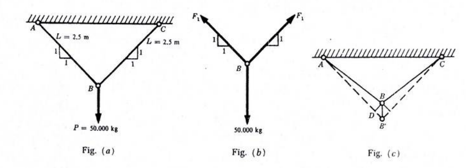


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

En la Fig. (*b*) se representa un diagrama de cuerpo en libertad de la articulación de *B*, donde F_1 expresa la fuerza (en kg) en cada barra.

De la estática, $\Sigma F_v = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})F_1 - 50.000 = 0$ o $F_1 = 35.355$ kg.

Por tanto, la sección buscada es $A = \frac{35.355}{2.100} = 17$ cm².

Como nuestro estudio de resistencia de materiales se limita a deformaciones *pequeñas*, el aspecto geométrico de la figura no ha variado sensiblemente, por lo que podemos representar la posición de las barras deformadas por las líneas de trazos de la Fig. (*c*), y el ángulo *DB'B* es prácticamente de 45°. El alargamiento de la barra izquierda está representado por *DB'* y, por la expresión del alargamiento axial, se halla que es

$$DB' = \frac{(35.355)(250)}{(17)(2{,}1 \cdot 10^6)} = 0{,}25 \text{ cm} \qquad \text{y, por tanto,} \qquad BB' = \frac{0{,}25}{\cos 45^\circ} = 0{,}35 \text{ cm}$$

13. Las dos barras de acero *AB* y *BC* están articuladas en cada extremo y soportan la carga de 30.000 kg representada en la Fig. (*a*) siguiente. El metal es acero recocido, con un límite elástico convencional de 4.200 kg/cm². Son aceptables los coeficientes de seguridad de 2 para los elementos a tracción y 3,5 para los de compresión. Determinar las secciones necesarias de las barras, así como las componentes horizontal y vertical del desplazamiento del punto *B*. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

En la Fig. (*b*) aparece un diagrama del nudo *B* como cuerpo en libertad, si se supone que las fuerzas desconocidas son tracciones.

De la estática: $\Sigma F_v = -30.000 - BC \text{ sen } 30^\circ = 0$ o $BC = -60.000$ kg
$\Sigma F_h = -BA - BC \cos 30^\circ = 0$ o $BA = 52.000$ kg

Las tensiones de trabajo vienen dadas por $\frac{4.200}{3} = 2.100$ kg/cm² para tracción

y $\frac{4.200}{3,5} = 1.200$ kg/cm² para compresión.

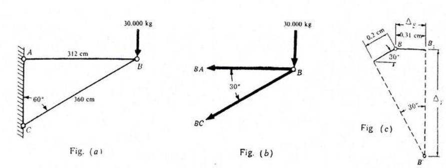


Fig. (a) Fig. (b)

Las secciones necesarias se hallan dividiendo la fuerza axial en cada barra por la tensión de trabajo admisible. En consecuencia,

$$A_{AB} = \frac{52.000}{2.100} = 24,7 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_{BC} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2$$

Para hallar el desplazamiento del punto B es necesario primero calcular la deformación axial de cada una de las barras. Por la expresión deducida en el Problema 1 hallamos que el alargamiento de AB es

$$\Delta_{AB} = \frac{(52.000)(312)}{(24,7)(2,1 \times 10^6)} = 0,31 \text{ cm}$$

y que la reducción de BC es $\Delta_{BC} = \frac{(60.000)(360)}{(50)(2,1 \times 10^6)} = 0,2$ cm.

Puede determinarse la posición del punto B después de la deformación, comprobando que la barra AB se alarga 0,31 cm y gira como un cuerpo rígido alrededor de la articulación en A, y que la BC se acorta 0,2 cm y gira también alrededor de la articulación en C.

La Fig. (c) representa el movimiento del punto B hasta su posición deformada B'. Hay que hacer notar que la deformación de la estructura es pequeña, por lo que puede representarse el desplazamiento debido al giro alrededor de A, de la barra AB alargada, por la recta B_1B' en lugar del arco de círculo con centro en A, y lo mismo puede decirse respecto al giro de la barra BC. Considerando el esquema de más arriba vemos inmediatamente que las componentes del desplazamiento del punto B son

$$\Delta_h = 0,31 \text{ cm}$$

$$\Delta_v = \left[\frac{(0,2 \cos 30^\circ) + 0,31}{\text{tg } 30^\circ}\right] + 0,2 \text{ sen } 30^\circ = 0,85 \text{ cm}$$

14. Considerar dos varillas delgadas o alambres, como las representadas en la Fig. (a) siguiente, que están articuladas en A, B y C y son inicialmente horizontales y de longitud L cuando no hay aplicada ninguna carga. El peso de las varillas es despreciable. Si se aplica (gradualmente) una fuerza Q en el punto B, determinar la magnitud de Q para producir una deformación vertical fijada δ del punto B.

Es un ejemplo muy interesante de sistema en el cual el alargamiento de cada uno de sus elementos satisface la ley de Hooke, a pesar de lo cual, por razones geométricas, la deformación *no* es proporcional a la fuerza.

Para cada barra es cierta la relación $\Delta = \frac{PL}{AE}$

donde P es la fuerza axial en la barra y Δ el alargamiento axial. Inicialmente, cada barra tiene longitud L y después de que se ha aplicado toda la carga, la longitud es L'. Por tanto,

(1) $$L' - L = \frac{PL}{AE}$$

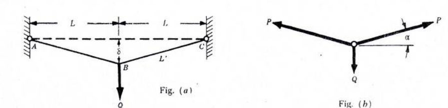


Fig. (a) Fig. (b)

En la Fig. (b) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la articulación B. Por la estática,

$$\Sigma F_v = 2P \text{ sen } \alpha - Q = 0 \quad \text{o} \quad Q = 2P(\frac{\delta}{L'})$$

(2) Teniendo en cuenta (1) $$Q = 2[\frac{(L' - L)AE}{L}]\frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L}(1 - \frac{L}{L'})$$

(3) Pero $$(L')^2 = L^2 + \delta^2$$

(4) Por consiguiente, $$Q = \frac{2\delta AE}{L}[1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}}]$$

Y, por la fórmula del binomio, tenemos

(5) $$\sqrt{L^2 + \delta^2} = L\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{L^2}} = L\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{L^2} + \cdots\}$$ y, por tanto,

(6) $$1 - \frac{L}{L\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{L^2}\}} \approx 1 - (1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{L^2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{L^2}$$

De aquí tenemos la fórmula aproximada que relaciona fuerza y desplazamiento,

(7) $$Q = \frac{2AE\delta}{L}\{\frac{\delta^2}{2L^2}\} = \frac{AE\delta^3}{L^3}$$ que corresponde a la ecuación (4).

Así, pues, el desplazamiento *no* es proporcional a la fuerza Q, aunque se cumpla la ley de Hooke para cada barra individualmente. Hay que observar que Q es más aproximadamente proporcional a δ cuando ésta se hace mayor, suponiendo que se siga cumpliendo la ley de Hooke para el alargamiento de las barras. En este ejemplo *no* se cumple la superposición. La característica de este sistema es que la acción de las fuerzas exteriores resulta *sensiblemente* afectada por las pequeñas deformaciones que se producen. En este caso, las tensiones y los desplazamientos no son funciones lineales de las cargas aplicadas y la superposición no es válida.

RESUMEN. Si hay que aplicar la superposición, el material debe obedecer la ley de Hooke; pero esta condición no es suficiente, sino que debemos comprobar si la acción de las cargas aplicadas resulta afectada por las pequeñas deformaciones de la estructura. Si el efecto es considerable, no es válida la superposición.

15. Para el sistema estudiado en el Problema 14, consideremos cables con una longitud inicial de 150 cm, sección de 0,6 cm² y con $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Determinar, para una carga Q de 10 kg, la deformación en el centro δ por las relaciones exacta y aproximada dadas anteriormente.

20. Ya hemos dado la forma general tridimensional de la ley de Hooke, en la que las componentes de la deformación están expresadas en función de las componentes de la tensión. A veces es necesario expresar las componentes de la tensión en función de las de la deformación. Deduzcamos estas expresiones:

Dadas las expresiones previas

(*1*) $$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

(*2*) $$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

(*3*) $$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

introduzcamos la notación

(*4*) $$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

(*5*) $$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Con esta notación se pueden resolver fácilmente las ecuaciones (*1*), (*2*) y (*3*) por determinantes, despejando σ_x, σ_y, σ_z, obteniéndose

(*6*) $$\sigma_x = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{(1+\mu)}\epsilon_x$$

(*7*) $$\sigma_y = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{(1+\mu)}\epsilon_y$$

(*8*) $$\sigma_z = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{(1+\mu)}\epsilon_z$$

que son las expresiones buscadas.

Podemos sacar todavía más consecuencias de las ecuaciones (*1*) a (*5*). Si se suman las (*1*), (*2*) y (*3*), introduciendo los símbolos e y θ, tenemos

(*9*) $$e = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)\theta$$

Para el caso particular de un sólido sometido a presión hidrostática uniforme p, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, por lo que

$$e = \frac{-3(1-2\mu)p}{E} \quad \text{o} \quad \frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1-2\mu)}$$

A la cantidad $\frac{E}{3(1-2\mu)}$ se le representa a veces por K y se designa por *módulo de volumen* o *módulo de dilatación de volumen* del material. Físicamente, K es una medida de la resistencia de un material a cambiar de volumen, sin variación de forma.

Vemos que el volumen final de un elemento de lados dx, dy, dz, antes de la carga y sometido a deformaciones ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, es

$$(1 + \epsilon_x)dx\ (1 + \epsilon_y)dy\ (1 + \epsilon_z)dz = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx\ dy\ dz$$

por lo que la relación del incremento de volumen al volumen inicial está dada aproximadamente por

$$e = \epsilon_x \cdot \epsilon_y + \epsilon_z$$

Esta variación por unidad de volumen (e) se conoce por *dilatación*.

PROBLEMAS PROPUESTOS

21. Una barra recta de sección uniforme está sometida a tracción axial. La sección es de 6 cm^2 y la longitud de 4 m. Si el alargamiento total es de 0,40 cm, bajo una carga de 12.600 kg, hallar el módulo de elasticidad del material.
Sol. $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2

22. Calcular de qué altura se puede construir un muro vertical de hormigón si su resistencia de rotura es de 176 kg/cm^2 y se emplea un coeficiente de seguridad 4. La densidad del hormigón es de 2.200 kg/m^3. *Sol.* $h = 200$ m

23. Un cilindro recto, hueco, de sección circular, de fundición, tiene un diámetro exterior de 7,5 cm y uno interior de 6 cm. Si se le carga con una fuerza axial de compresión de 5.000 kg, determinar el acortamiento total en 50 cm de longitud, así como la tensión normal bajo esa carga. Tomar como módulo de elasticidad $E = 1{,}05 \times 10^6$ kg/cm^2 y despreciar toda probabilidad de pandeo lateral del cilindro. *Sol.* $\Delta = 0{,}015$ cm, $\sigma = 314$ kg/cm^2

24. Una varilla circular maciza de acero, de 6 mm de diámetro y de 40 cm de longitud, está rígidamente unida al extremo de una barra cuadrada de bronce de 2 cm de lado y 30 cm de longitud, con sus ejes sobre la misma recta. Se aplica una fuerza de tracción axial de 500 kg en cada extremo. Determinar el alargamiento total del conjunto. Para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2 y para el bronce $E = 9{,}5 \times 10^5$ kg/cm^2. *Sol.* 0,0376 cm

25. La armadura de la figura tiene los nudos articulados y soporta solamente la fuerza de 15.000 kg. Todas las barras son de acero SAE 1.020 con un límite elástico aparente de 2.450 kg/cm^2. Para los elementos que trabajan a tracción es suficiente un coeficiente de seguridad de 2. Determinar las secciones necesarias para las barras *CD* y *AB*. Véase la Figura (*a*). *Sol.* Sección $CD = 6{,}12$ cm^2, sección $AB = 7{,}65$ cm^2

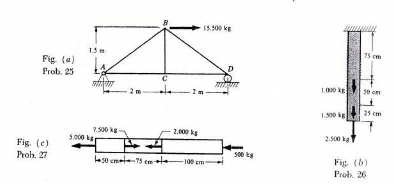


Fig. (*a*) Prob. 25

Fig. (*b*) Prob. 26

Fig. (*c*) Prob. 27

26. Una barra de acero de sección uniforme está suspendida verticalmente y soporta una carga de 2.500 kg en su extremo inferior, como se ve en la Fig. (*b*). 25 cm más arriba está aplicada una fuerza vertical de 1.500 kg y otros 50 cm más arriba otra de 1.000 kg. La longitud total de la barra es de 150 cm y su sección de 6 cm^2. El módulo de elasticidad es $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Determinar el alargamiento total de la barra. *Sol.* 0,0506 cm

27. Una barra de bronce de 10 cm^2 de sección está sometida a las fuerzas axiales representadas en la Fig. (*c*). Determinar el alargamiento total de la barra, siendo $E = 9 \times 10^5$ kg/cm^2. *Sol.* 0,0013 cm

28. Los raíles de ferrocarril, de acero, están colocados con sus extremos contiguos separados 3 mm cuando la temperatura es de 15° C. La longitud de cada raíl es de 12 m y el material acero de $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2 y $\alpha = 11 \times 10^{-6}$ por °C. (*a*) Calcular la distancia entre carriles cuando la temperatura es de $-24°$ C. (*b*) ¿A qué temperatura estarán en contacto dos carriles contiguos? (*c*) Hallar la tensión de compresión en los raíles cuando la temperatura es de 45° C. Despreciar toda posibilidad de pandeo de los carriles.
Sol. Separación = 0,815 cm, $T = 37{,}7°$ C, $\sigma = 168$ kg/cm^2

29. Durante un ensayo de tracción de un acero estirado en frío, de diámetro 13 mm, se han obtenido los siguientes datos:

Carga axial (kg)	Alargamiento en la long. patrón 5 cm
0	0
570	0,0010
830	0,0015
1.090	0,0020
1.380	0,0025
1.650	0,0030
1.920	0,0035
2.200	0,0040
2.460	0,0045
2.750	0,0050
3.040	0,0055
3.300	0,0060
3.110	0,0100
3.140	0,0200

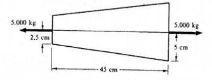
Carga axial (kg)	Alargamiento en la long. patrón 5 cm
3.140	0,0300
3.140	0,0400
3.120	0,0500
3.140	0,0600
3.160	0,1250
3.500	0,2500
4.230	0,5000
4.460	0,7500
4.560	1,0000
4.560	1,2500
4.460	1,5000
4.300	1,7500
4.020	1,8750

A la rotura, el diámetro final de la barra en la sección en que se produce fue de 0,75 mm. La longitud de los 5 cm patrón originales ha aumentado a 6,875 cm.

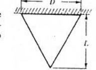
De los datos dados, determinar el límite de proporcionalidad del material, el módulo de elasticidad, el tanto por ciento de reducción de la sección, el alargamiento en tanto por ciento y la resistencia de rotura.

Sol. Límite de proporcionalidad 2.480 kg/cm², $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Tanto por ciento de reducción de la sección = 66,8. Tanto por ciento de alargamiento = 37,5. Resistencia de rotura = 3.029 kg/cm²

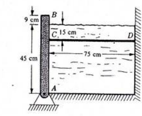
30. Una placa de acero delgada tiene la forma trapezoidal de la figura. El espesor es de 12 mm y varía uniformemente desde una anchura de 50 mm hasta otra de 100 mm en una longitud de 450 mm. Si se aplica en cada extremo una fuerza axial de 5.000 kg, determinar el alargamiento de la placa. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 0,0124 cm



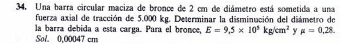
31. Una barra cónica maciza de sección circular está suspendida verticalmente como se ve en la figura adjunta. La longitud de la barra es L, el diámetro de su base D, el módulo de elasticidad E y el peso por unidad de volumen γ. Determinar el alargamiento de la barra debido a su propio peso. *Sol.* $\Delta = \dfrac{\gamma L^2}{6E}$



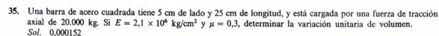
32. La compuerta vertical AB representada en el diagrama adjunto puede considerarse totalmente rígida y está articulada en A. Tiene 3 m de anchura y está sometida a presión hidrostática en toda su anchura. En C hay sujeta una barra de acero de 7,5 m de longitud y sección 3 cm² para atirantarla contra el muro en D. Hallar el desplazamiento horizontal del punto B. Despreciar el efecto de sujeción en los extremos de la compuerta. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$. *Sol.* Desplazamiento = 3,25 cm



33. Las barras de acero AB y BC están articuladas en sus extremos y soportan la carga de 22.000 kg que se muestra en la figura adjunta. El material es acero de estructuras con un límite elástico aparente de $2,45 \times 10^3$ kg/cm^2, siendo aceptables los coeficientes de seguridad 2 y 3,5 para tracciones y compresiones, respectivamente. Determinar la dimensión de cada barra y las componentes vertical y horizontal del desplazamiento del punto B. Tomar $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm^2 y despreciar la posibilidad de pandeo lateral de la barra BC.
Sol. Sección de AB = 15,55 cm^2
Sección de BC = 15,71 cm^2
Δ_h = 0,032 cm (hacia la derecha)
Δ_v = 0,156 cm (hacia abajo)



34. Una barra circular maciza de bronce de 2 cm de diámetro está sometida a una fuerza axial de tracción de 5.000 kg. Determinar la disminución del diámetro de la barra debida a esta carga. Para el bronce, $E = 9,5 \times 10^5$ kg/cm^2 y $\mu = 0,28$.
Sol. 0,00047 cm



35. Una barra de acero cuadrada tiene 5 cm de lado y 25 cm de longitud, y está cargada por una fuerza de tracción axial de 20.000 kg. Si $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm^2 y $\mu = 0,3$, determinar la variación unitaria de volumen.
Sol. 0,000152

36. Considerar la barra cuadrada de aluminio descrita en el Problema 19, pero con la carga axial invertida, de modo que produzca compresión. Considerando una deformación por compresión de 0,001 cm/cm, determinar el volumen de la barra cuando está aplicada la carga. *Sol.* 624,788 cm^3

37. Considerar un estado de tensiones en un elemento para el cual se ejerce una tensión de σ_x en una dirección y se impide totalmente la contracción lateral en las otras dos direcciones. Hallar el módulo de elasticidad efectivo y el valor efectivo de la relación de Poisson.
Sol. Mód. ef. $= \dfrac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}$, Rel. ef. de Poisson = 0

38. Considerar el estado de tensiones en una barra sometida a compresión en la dirección del eje. La dilatación lateral está reducida a la mitad del valor que tendría si las caras laterales estuvieran libres. Hallar el módulo de elasticidad efectivo.
Sol. Mód. ef. $= \dfrac{E(1-\mu)}{(1-\mu-\mu^2)}$

39. Una barra de sección uniforme está sometida a tracción uniaxial y sufre una deformación en la dirección de la fuerza de 1/800. Calcular la variación de volumen por unidad. Suponer $\mu = 1/3$.
Sol. 1/2.400 (aumento)

40. Una varilla recta de aluminio de 3 cm de diámetro está sometida a una fuerza de tracción axial de 5.000 kg. Determinar

(*a*) la tensión unitaria
(*b*) la deformación unitaria
(*c*) el alargamiento en una longitud patrón de 20 cm
(*d*) la variación de diámetro
(*e*) la variación de sección
(*f*) la variación de volumen en una longitud patrón de 20 cm

Sol. (*a*) 710 kg/cm^2
(*b*) 0,00101 cm/cm
(*c*) 0,0202 cm
(*d*) −0,000757 cm
(*e*) −0,00356 cm^2
(*f*) 0,0706 cm^3

Suponer $E = 7 \times 10^5$ kg/cm^2, $\mu = 1/4$.

CAPITULO 2

Sistemas de fuerzas estáticamente indeterminados Tracción y compresión

DEFINICION DE SISTEMA DE FUERZAS DETERMINADO. Si se pueden determinar los valores de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo, solamente por las ecuaciones del equilibrio estático, el sistema de fuerzas es *estáticamente determinado*. Todos los problemas del Capítulo 1 eran de este tipo.

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE FUERZA DETERMINADOS. La barra representada en la Fig. 1 está cargada por la fuerza P. Las reacciones son R_1, R_2 y R_3. El sistema es estáticamente determinado, porque disponemos de tres ecuaciones del equilibrio estático para el sistema y son suficientes para determinar las tres incógnitas.

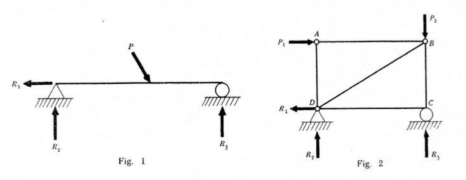


Fig. 1

Fig. 2

La armadura $ABCD$ representada en la Fig. 2 está cargada por las fuerzas P_1 y P_2. Las reacciones son R_1, R_2 y R_3. Nuevamente, como se dispone de tres ecuaciones del equilibrio estático, se pueden determinar las tres reacciones desconocidas, por lo que el sistema de fuerzas exteriores es estáticamente determinado.

Los dos ejemplos anteriores se refieren solo a reacciones exteriores, por lo que pueden definirse los sistemas de fuerzas como estáticamente determinados exteriormente.

DEFINICION DE SISTEMA DE FUERZAS INDETERMINADO. En muchos casos, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no pueden determinarse solo por las ecuaciones de la estática, porque hay más fuerzas desconocidas que ecuaciones de equilibrio. En este caso, el sistema de fuerzas es *estáticamente indeterminado*.

EJEMPLOS DE SISTEMAS DE FUERZAS INDETERMINADOS. La barra de la Fig. 3 está cargada con la fuerza P. Las reacciones son R_1, R_2, R_3 y R_4. El sistema de fuerzas es estáticamente indeterminado porque hay cuatro reacciones desconocidas y solo tres ecuaciones del equilibrio estático. Se dice que tal sistema de fuerzas es indeterminado en primer grado.

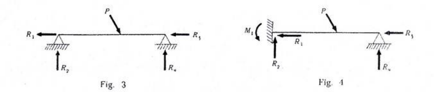


Fig. 3

Fig. 4

La barra representada en la Fig. 4 es estáticamente indeterminada de segundo grado porque hay cinco reacciones desconocidas R_1, R_2, R_3, R_4 y M_1 y solo tres ecuaciones del equilibrio estático. Por consiguiente, no pueden determinarse los valores de todas las reacciones con solo las ecuaciones de la estática.

METODO DE ESTUDIO. El procedimiento que consideraremos aquí se llama *método de la deformación*, porque estudia las deformaciones en el sistema. En resumen, el proceso a seguir para estudiar un sistema indeterminado consiste en escribir primero todas las ecuaciones del equilibrio estático correspondientes al mismo y luego *suplementarlas* con otras basadas en las deformaciones de la estructura. Hay que escribir suficiente número de ecuaciones sobre las deformaciones para que el total, junto con las de la estática, sea igual al número de fuerzas desconocidas que intervienen. Véanse en particular los Problemas 1, 2, 3, 4, 7, 12 y 13.

Por ejemplo, si un sistema contiene cinco fuerzas desconocidas, solo pueden escribirse tres ecuaciones del equilibrio estático para el sistema, por lo que es necesario suplementarlas con otras dos ecuaciones basadas en las deformaciones. Este sistema es estáticamente indeterminado de segundo grado. Para hallar las cinco incógnitas, es necesario resolver el sistema de cinco ecuaciones resultante. Afortunadamente, solo en muy pocos casos aparecen todas las incógnitas en cada ecuación.

En este capítulo trataremos de sistemas indeterminados que contienen barras a tracción o compresión. En capítulos sucesivos se estudiarán elementos indeterminados de otros tipos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La barra representada en la Fig. (*a*) es de sección constante y está sujeta rígidamente entre los muros. Si se aplica una carga P a la distancia L_1 del extremo izquierdo, determinar las reacciones de los muros sobre la barra.

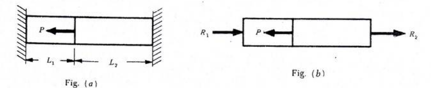


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

Dibujaremos primero el diagrama de cuerpo en libertad de la barra, mostrando la fuerza aplicada P juntamente con las reacciones de los muros, que representaremos por R_1 y R_2, como se ve en la Figura (*b*).

Hay solo una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\Sigma F_h = R_1 - P + R_2 = 0$$

Como esta ecuación contiene dos incógnitas (R_1 y R_2) el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementar la ecuación con otra basada en las deformaciones de la barra.

El acortamiento de la parte de barra de longitud L_1 debe ser igual al alargamiento del trozo de longitud L_2, lo que proporciona la base para obtener la ecuación referente a las deformaciones. La variación de longitud de una barra debida a carga axial se dio en el Problema 1, Capítulo 1. La fuerza axial que actúa en la parte izquierda de la barra es R_1 (kg) y en la derecha R_2 (kg). La ecuación que relaciona las deformaciones es

$$\frac{R_1L_1}{AE} = \frac{R_2L_2}{AE}$$

donde A representa el área de la sección de la barra y E el módulo de elasticidad. De esta ecuación tenemos que $R_1L_1 = R_2L_2$ y resolviéndola, juntamente con la de la estática, hallamos

$$R_1 = \frac{PL_2}{L_1 + L_2} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{PL_1}{L_1 + L_2}$$

Conociendo esas reacciones, es evidente que el alargamiento de la parte derecha (L_2) de la barra es

$$\Delta_e = \frac{R_2L_2}{AE} = \frac{PL_1L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

y el acortamiento de la izquierda (L_1)

$$\Delta_c = -\frac{R_1L_1}{AE} = -\frac{PL_1L_2}{(L_1 + L_2)AE}$$

por lo que

$$\Delta_e = -\Delta_c$$

2. Considerar un tubo de acero que rodea a un cilindro macizo de aluminio, comprimido todo el conjunto entre placas infinitamente rígidas, por fuerzas aplicadas centralmente, como se ve en la Fig. (*a*). El cilindro de aluminio tiene 7,5 cm de diámetro y el diámetro exterior del tubo de acero es de 9 cm. Si $P = 24.000$ kg, hallar las tensiones en el acero y en el aluminio. Para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y para el aluminio $E = 2{,}8 \times 10^5$ kg/cm².

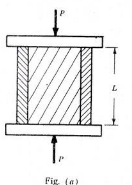


Fig. (*a*)

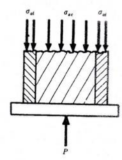


Fig. (*b*)

Tracemos un plano horizontal a través del conjunto a una altura cualquiera, excepto en la inmediación de las placas, y separemos una parte de la otra, por ejemplo, la superior. La parte que hemos quitado debe ser sustituida por el efecto que ejerce sobre el resto, efecto que consiste en esfuerzos verticales normales, distribuidos en los dos materiales. En la Fig. (*b*) se representa el diagrama de cuerpo en libertad de la parte del conjunto situada bajo el plano de corte, siendo σ_{ac} y σ_{al} las tensiones normales que existen en el acero y el aluminio, respectivamente.

Si representamos la fuerza total soportada por el acero por P_{ac} (kg) y la del aluminio por P_{al},

$$P_{ac} = A_{ac} \cdot \sigma_{ac} \quad \text{y} \quad P_{al} = A_{al} \cdot \sigma_{al}$$

donde A_{ac} y A_{al} representan las secciones del tubo de acero y el cilindro de aluminio, respectivamente. Solo disponemos de una ecuación de equilibrio estático para este sistema de fuerzas, y toma la forma

$$\Sigma F_v = P - P_{ac} - P_{al} = 0$$

Así, pues, tenemos una ecuación con dos incógnitas P_{ac} y P_{al}, por lo que el problema es estáticamente indeterminado. En este caso tenemos que suplementar la ecuación de la estática por otra deducida de las deformaciones de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente porque las placas infinitamente rígidas obligan a ser iguales a las deformaciones axiales de los dos metales.

La deformación debida a la carga axial está dada por $\Delta = PL/AE$. Igualando las deformaciones axiales del acero y el aluminio, tenemos

$$\frac{P_{ac} \cdot L}{A_{ac} \cdot E_{ac}} = \frac{P_{al} \cdot L}{A_{al} \cdot E_{al}}$$

o $$\frac{P_{ac} \cdot L}{\frac{\pi}{4}[(9)^2 - (7{,}5)^2](2{,}1 \times 10^6)} = \frac{P_{al} \cdot L}{\frac{\pi}{4}(7{,}5)^2(2{,}8 \times 10^5)}, \quad \text{de donde} \quad P_{ac} = 3{,}3P_{al}$$

Resolviendo esta ecuación conjuntamente con la de la estática $P - P_{ac} - P_{al} = 0$, hallamos $P_{al} = 0{,}233P$, $P_{ac} = 0{,}767P$.

Para una carga de 24.000 kg, se obtiene $P_{al} = 5.590$ kg, $P_{ac} = 18.410$ kg, y dividiendo las fuerzas resultantes en cada material por su sección, se obtienen las tensiones buscadas:

$$\sigma_{al} = \frac{5.590}{\frac{\pi}{4}(7{,}5)^2} = 126 \text{ kg/cm}^2; \qquad \sigma_{ac} = \frac{18.410}{\frac{\pi}{4}[(9)^2 - (7{,}5)^2]} = 947 \text{ kg/cm}^2$$

3. La barra AB es absolutamente rígida y está soportada por tres varillas, como se ve en la Fig. (*a*). Las dos varillas extremas son de acero y tienen una sección de 3 cm². La central es de cobre y de sección 9 cm². Para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², y para el cobre, $E = 1{,}2 \times 10^6$ kg/cm². Todas las varillas tienen 2,10 m y están igualmente separadas entre sí, estando aplicadas las cargas de 6.000 kg en el punto medio entre ellas. Despreciando el peso de la barra AB, determinar la fuerza en cada una de las barras verticales. AB permanece horizontal después de aplicar las cargas.

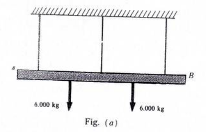


Fig. (*a*)

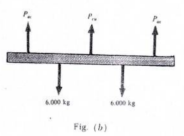


Fig. (*b*)

Primero dibujaremos un diagrama de cuerpo en libertad de la barra AB en que aparezcan todas las fuerzas que actúan en ella, incluyendo las dos cargas aplicadas y las reacciones de las varillas verticales. Si se representa la fuerza en cada una de las varillas de acero por P_{ac} (kg) y la de la de cobre por P_{cu} (kg), el diagrama aparece como en la Figura (*b*).

Ya se ha hecho uso de la condición de simetría al decir que las fuerzas son iguales en las dos varillas de acero, por lo que solo queda una ecuación de equilibrio estático, que es

$$\Sigma F_v = 2P_{ac} + P_{cu} - 12.000 = 0$$

Tenemos, pues, una ecuación con dos incógnitas y el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que suplementarla con otra que provenga de las deformaciones de la estructura.

Se determina fácilmente esta ecuación porque el alargamiento de las varillas de acero y de cobre es el mismo. Aplicando la expresión del alargamiento debido a una carga axial $\Delta = PL/AE$ a las varillas, tenemos

$$\frac{P_{ac}\,(210)}{(3)(2{,}1 \times 10^6)} = \frac{P_{cu}\,(210)}{(9)(1.2 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P_{ac} = 0.583 P_{cu}$$

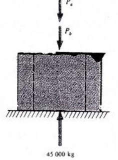
Resolviendo esta ecuación juntamente con la de la estática, se tiene

$$2(0.583 P_{cu}) + P_{cu} - 12.000 = 0$$

y despejando, $P_{cu} = 5.540$ kg y $P_{ac} = 3.230$ kg.

4. Considerar un pilar cuadrado de hormigón armado de 30 × 30 cm de sección y 2,40 m de altura. El hormigón está armado con ocho barras verticales de acero, cuadradas, de 2 cm de lado, colocadas simétricamente respecto al eje vertical del pilar. Se ha aplicado una fuerza de compresión axial de 45.000 kg, a través de una placa absolutamente rígida en la parte superior del hormigón. Considerar, para el acero $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y para el hormigón $E = 1{,}75 \times 10^5$ kg/cm². Determinar la tensión en el hormigón y en el acero.

Cortemos el pilar por un plano horizontal y quitemos la parte de encima de este plano. La parte suprimida deberá sustituirse por cualquier efecto que ejerciera sobre la parte inferior, efecto que consiste en fuerzas verticales distribuidas sobre el hormigón y sobre el acero. El diagrama de cuerpo en libertad de la parte inferior tiene el aspecto representado en el diagrama adjunto, donde P_a y P_b representan las fuerzas resultantes que se ejercen sobre el acero y sobre el hormigón, respectivamente, por la parte superior que se ha suprimido. La fuerza P_b, por ejemplo, es en realidad la resultante de las tensiones normales que se supone uniformemente repartidas sobre toda la sección transversal del hormigón. Como la carga es axial, es razonable suponer una distribución uniforme de la tensión normal, por lo que la resultante P_b está en el eje geométrico del pilar.



Solo hay disponible una ecuación de equilibrio estático para este sistema, que es

$$\Sigma F_v = 45.000 - P_b - P_a = 0$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado y es necesario tratarla juntamente con otra ecuación basada en la deformación de la estructura. Esta ecuación se obtiene fácilmente, pues el acortamiento del hormigón y del acero son iguales a causa de la placa rígida. La deformación bajo la carga axial es $\Delta = PL/AE$, y aplicando esta expresión a los dos materiales, tenemos

$$\frac{P_a \cdot L}{8(2)^2(2{,}1 \cdot 10^6)} = \frac{P_b \cdot L}{[900 - 8(2)^2](1.75 \cdot 10^5)}$$

donde L representa la altura del pilar. Despejando, $P_a = 0{,}442 P_b$ y

$$45.000 - P_b - 0{,}442 P_b = 0. \qquad P_b = 31.200 \text{ kg. y } P_a = 13.800 \text{ kg}$$

La tensión en el acero se halla dividiendo la fuerza resultante en las ocho barras, por su sección. Del mismo modo, se obtiene la tensión en el hormigón dividiendo la fuerza resultante P_b por la sección del hormigón. Así,

$$\sigma_a = \frac{13.800}{8(2)^2} = 430 \text{ kg/cm}^2 \qquad \sigma_b = \frac{31.200}{900 - 8(2)^2} = 36 \text{ kg/cm}^2$$

5. Un tubo de acero, vertical, de diámetro exterior 90 cm e interior 88 cm, está lleno de hormigón. Si el límite elástico aparente del acero es de 3.1×10^3 kg/cm², se admite un coeficiente de seguridad 2.25 y la resistencia a rotura del hormigón es de 175 kg/cm² y su coeficiente de seguridad 2.5, ¿qué carga axial total de compresión puede soportar? Suponer que los dos extremos del tubo están cubiertos por placas infinitamente rígidas, y despreciar los efectos de la expansión lateral de los dos materiales. Tomar para el acero $E = 2.1 \times 10^6$ kg/cm² y para el hormigón $E = 1.75 \times 10^5$ kg/cm². (La relación del módulo de Young para el acero y para el hormigón se suele designar por n, esto es, $n = E_a/E_h$. Aquí, $n = 12$.)

La sección del hormigón es de 6.082 cm², y la del acero 280 cm². Como la variación total de altura del acero debe ser igual a la del hormigón, tenemos

$$\frac{P_h \cdot L}{(6.082)(1.75 \cdot 10^5)} = \frac{P_a \cdot L}{(280)(2.1 \cdot 10^6)} \quad \text{o} \quad P_h = 1.81 P_a$$

siendo P_h y P_a las fuerzas resultantes en el hormigón y en el acero, respectivamente. Por la estática solo tenemos la ecuación $P = P_a + P_h$, siendo P la carga axial total soportada.

Es improbable que se alcance la tensión de trabajo admisible para los dos materiales simultáneamente. Probablemente, el procedimiento más sencillo es calcular dos valores de la carga total axial, uno basado en la hipótesis de que el hormigón está sometido a su carga de trabajo de 70 kg/cm² y el otro suponiendo que el acero alcanza la suya de 1.380 kg/cm², siendo el menor de estos dos valores el determinante. Así, si el hormigón está sometido a su tensión de trabajo máxima, tenemos

$$P = 70(6.082)[1 + 1/1.81] = 661.000 \text{ kg}$$

Por otro lado, si el acero está sometido a 1.380 kg/cm², tenemos

$$P = 1.380(280)[1 + 1.81] = 1.086.000 \text{ kg}$$

Por consiguiente, la carga axial admisible es $P = 661.000$ kg.

6. La barra AD, inicialmente recta, tiene una sección uniforme y está amordazada en los apoyos extremos, como se ve en la figura, sin que exista ninguna tensión inicial. Se aplican las cargas simétricamente colocadas de la Fig. (*a*) a las ménsulas (cuyo efecto se desprecia) y se desea hallar la fuerza de tracción o compresión resultante sobre cada sección transversal en cada una de las zonas AB, BC y CD.

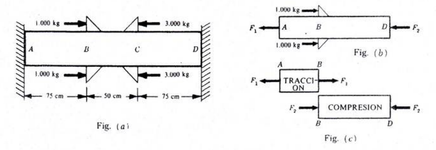


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

Fig. (*c*)

Consideremos primero solamente la carga total de 2.000 kg aplicada en B y comprobemos que la barra AD está en equilibrio. Habrá dos reacciones F_1 y F_2 en los extremos de la barra para equilibrar la fuerza de 2(1.000) = 2.000 kg. Entre A y B habrá una tracción de F_1, y entre B y D una compresión, como se ve en la Fig. (*b*), lo que puede representarse también como en la Fig. (*c*). Así, F_1 alarga AB y B se mueve la distancia $\Delta_1 = F_1(75)/AE$ hacia la derecha. Del mismo modo, F_2 comprime BD y B se mueve $\Delta_2 = F_2(125)/AE$.

Evidentemente, $\Delta_1 = \Delta_2$ y podemos escribir $\dfrac{F_1(75)}{AE} = \dfrac{F_2(125)}{AE}$ o $F_1 = (\frac{5}{3}) F_2$.

De la estática tenemos solamente la ecuación $\Sigma F_h = -F_1' - F_2 + 2.000 = 0$. Sustituyendo.

$(5/3)F_2 + F_2 = 2.000$, $F_2 = 750$ kg (BD está en compresión) y $F_1 = 1.250$ kg (AB está en tracción)

La distribución de las fuerzas axiales internas es ya evidente. Debido a la carga de $2(3.000) = 6.000$ kg, tenemos

$(5/8)(6.000) = 3.750$ kg (CD está en tracción)
$(3/8)(6.000) = 2.250$ kg (AD está en compresión)

Sumando algebraicamente los resultados anteriores, se pueden hallar ya las fuerzas axiales resultantes en las distintas partes de AD. Los valores finales son

$AB = 1.250 - 2.250 = -1.000$ kg, $BC = -750 - 2.250 = -3.000$ kg, $CD = -750 + 3.750 = 3.000$ kg

donde el signo positivo indica fuerza de tracción y el negativo de compresión.

7. Considerar la barra AB de la Fig. (a) absolutamente rígida y horizontal antes de aplicar la carga de 20.000 kg, articulada en A y soportada por la varilla de acero EB y la de cobre CD. La longitud de CD es de 90 cm y la de EB de 150 cm. Si la sección de CD es de 5 cm² y la de EB de 3 cm², determinar la tensión en cada varilla vertical y el alargamiento de la de acero. Despreciar el peso de AB. Para el cobre, $E = 1,2 \times 10^6$ kg/cm² y para el acero $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm².

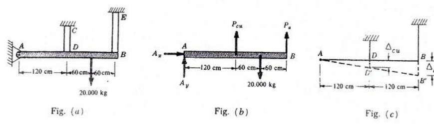


Fig. (a) Fig. (b) Fig. (c)

El primer paso para resolver el problema es trazar el diagrama de cuerpo en libertad de la barra AB, con todas las fuerzas que actúan sobre ella. Es lo que se ha hecho en la Figura (b).

De la estática, tenemos
(1) $\Sigma F_h = A_x = 0$
(2) $\Sigma M_A = 120P_{cu} + 240P_a - 20.000(180) = 0$
(3) $\Sigma F_v = A_y + P_{cu} + P_a - 20.000 = 0$

Como las dos últimas ecuaciones tienen tres incógnitas, el problema es estáticamente indeterminado, por lo que hay que buscar otra, basada en las deformaciones del sistema. Como la barra AB es rígida, el único movimiento que puede producirse es un giro del cuerpo rígido alrededor de A como centro. La línea de trazos de la Fig. (c) indica la posición final de AB después de aplicar la carga de 20.000 kg. Inicialmente, esa barra era horizontal, como muestra la línea llena.

Los extremos inferiores de las varillas estaban al principio en D y B y se trasladan a D' y B' después de aplicar la carga. Como la barra AB es rígida, los triángulos semejantes ADD' y ABB' nos proporcionan una relación sencilla entre las deformaciones de las dos barras verticales: $\Delta_{cu}/120 = \Delta_a/240$ expresando por Δ_{cu} y Δ_a los alargamientos de las varillas de cobre y acero, respectivamente. Por tanto, la ecuación suplementaria basada en las deformaciones es

$$\Delta_a = 2\Delta_{cu}$$

Pero el alargamiento bajo carga axial viene dado por $\Delta = PL/AE$. Utilizando esta expresión en la relación anterior entre deformaciones, tenemos

$$\frac{P_a(150)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{2P_{cu}(90)}{(5)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P_a = 1,26P_{cu}$$

30402 ✓

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la (2) de la estática, tenemos

$$120P_{cu} + 240(1{,}26P_{cu}) = 360.000; \qquad P_{cu} = 8.500 \text{ kg} \quad \text{y} \quad P_a = 10.700 \text{ kg}$$

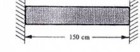
Las tensiones se obtienen por la relación $\sigma = P/A$.

En la varilla de cobre, $\sigma_{cu} = 8.500/5 = 1.700$ kg/cm²

En la varilla de acero, $\sigma_a = 10.700/3 = 3.600$ kg/cm²

8. Una barra de cobre tiene sección uniforme y está unida rígidamente a los muros, como se ve en la figura. La longitud es de 150 cm y la sección de 15 cm². A la temperatura de 25° C la varilla no tiene tensiones. Determinar las que existen en ella cuando descienda la temperatura a 10°, suponiendo que los apoyos no ceden. Para el cobre, $E = 1{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y $\alpha = 16 \times 10^{-6}$ por °C.

Un modo de resolver este problema es suponer que se corta la barra y se la separa del muro en el extremo derecho. En tal caso, es libre de contraerse cuando la temperatura desciende, contrayéndose la longitud



$$\Delta = (16 \times 10^{-6})(150)(15) = 0{,}036 \text{ cm}$$

de acuerdo con la definición de coeficiente de dilatación lineal (véase Capítulo 1).

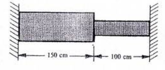
Ahora, es necesario hallar la fuerza axial P que hay que aplicar a la barra para alargarla 0,036 cm, esto es, para volver a llevar el extremo derecho a su posición verdadera, porque sabemos que en la realidad el extremo no se desplaza en absoluto al bajar la temperatura. Para determinar esta fuerza P, utilizamos la ecuación

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{que da} \quad 0{,}036 = \frac{P(150)}{(15)(1{,}1 \times 10^6)} \quad \text{o} \quad P = 3.960 \text{ kg}$$

La tensión axial que produce esta fuerza es $\sigma = P/A = 3.960/15 = 264$ kg/cm².

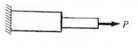
9. La barra compuesta de la figura está rígidamente sujeta a los dos apoyos. La parte de la izquierda es de cobre, con sección uniforme 70 cm² y longitud 150 cm, mientras que la derecha es de aluminio, con sección uniforme de 18 cm² y longitud 100 cm. A la temperatura de 25° C, el conjunto está sin tensiones. La temperatura de la estructura desciende, y durante este proceso el soporte derecho cede 0,05 cm en el sentido de la contracción del metal. Determinar la temperatura mínima a que puede someterse el conjunto para que la tensión en el aluminio no exceda de 1.700 kg/cm². Para el cobre, $E = 1{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 17 \times 10^{-6}$/°C, y para el aluminio, $E = 7 \times 10^5$ kg/cm² y $\alpha = 22{,}2 \times 10^{-6}$/°C.

Nuevamente, como en el ejemplo anterior, es quizá más sencillo considerar que la barra se corta inmediatamente a la izquierda del muro que la soporta por el lado derecho, quedando libre para contraerse por la baja de temperatura ΔT. El acortamiento total de la barra compuesta está dado por



$$(17 \cdot 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22{,}2 \cdot 10^{-6})(100)(\Delta T)$$

de acuerdo con la definición de coeficiente de dilatación lineal. Es de observar que la forma de la sección no tiene influencia en el cambio de longitud de la barra por variación de la temperatura.



Aun cuando la barra se haya contraído esta cantidad, sigue estando libre de tensiones, pero no hemos terminado el estudio, porque se ha suprimido la reacción del muro de la derecha cortando allí la barra. Por tanto, debemos representar la acción del muro por una fuerza axial P, aplicada a la barra, como se ve en el adjunto diagrama. Para que exista equilibrio, la fuerza resultante sobre cada sección transversal del cobre o del aluminio debe ser igual a P. La aplicación de la fuerza P alarga la

barra compuesta en una longitud $\dfrac{P(150)}{70(1,1\cdot10^6)}+\dfrac{P(100)}{18(0,7\cdot10^6)}$

Si no cediera el apoyo derecho, igualaríamos la última expresión a la que da el acortamiento total debido al descenso de temperatura, pero como dicho apoyo cede 0,05 cm, podemos escribir

$$\frac{P(150)}{70(1,1\cdot10^6)}+\frac{P(100)}{18(0,7\cdot10^6)}=(17\cdot10^{-6})(150)(\Delta T)+(22,2\cdot10^{-6})(100)(\Delta T)-0,05$$

La tensión en el aluminio no debe exceder de 1.700 kg/cm² y como viene dada por la fórmula $\sigma = P/A$, la fuerza máxima es

$$P = A\cdot\sigma = 18(1.700) = 30.600 \text{ kg}$$

Sustituyendo este valor de P en la ecuación anterior entre deformaciones, hallamos $\Delta T = 74°$ C, por lo que la temperatura puede descender 74° desde la original de 25°, siendo la final de −49° C.

10. Considerar la barra cónica de acero de la figura, que tiene los dos extremos sujetos en apoyos indeformables y está inicialmente libre de tensiones. Si la temperatura desciende 22° C, determinar la tensión máxima en la barra. Tomar $E = 2,1\times10^6$ kg/cm² y $\alpha = 11\times10^{-6}$/°C.

Quizá el modo más sencillo de resolver este problema es imaginar que un extremo de la barra, por ejemplo, el derecho, está temporalmente suelto de su apoyo. En este caso, la barra contrae una longitud

$$(22)(90)(11\times10^{-6}) = 0,0218 \text{ cm}$$

debido al descenso de temperatura.

Hallemos, ahora, la fuerza axial que hay que aplicar al extremo derecho «libre», para que la barra se alargue 0,0218 cm, esto es, para que se satisfaga en ese extremo la condición de límite verdadera, de fijeza completa. Adoptando el sistema de coordenadas de la figura, tenemos

$$r = 5 + 5x/90 = 5 + x/18$$

Como el ángulo con que varía la sección es relativamente pequeño, se puede suponer que la fuerza de tracción está uniformemente distribuida en cada sección transversal. Como tampoco hay cambios bruscos de sección, podemos determinar el alargamiento del elemento discoidal de espesor dx, aplicando $\Delta = PL/AE$, donde $L = dx$, al disco e integrando luego a lo largo de toda la barra:

$$0,0218=\int_0^{90}\frac{Pdx}{\pi(5+x/18)^2E}=\int_0^{90}\frac{324Pdx}{\pi E(90+x)^2}=\frac{324P}{180E\pi}$$

Y despejando, $P = 80.000$ kg, siendo P la fuerza resultante axial que actúa sobre cada sección, esto es, la fuerza necesaria para volver a llevar la barra a su longitud original.

Debe observarse que la fuerza resultante en cada sección vertical es P (kg) para que exista equilibrio en cualquier parte de la barra. Sin embargo, como el área de la sección varía de un extremo de la barra al otro, la tensión varía desde un valor máximo en el extremo izquierdo en que la sección es mínima, hasta un mínimo en el extremo derecho en que es máxima la sección.

La tensión máxima en el extremo izquierdo está dada por $\sigma_{max}=\dfrac{80.000}{\pi(5)^2}=1.020$ kg/cm²

11. Un cilindro hueco de acero rodea a otro macizo de cobre y el conjunto está sometido a una carga axial de 25.000 kg, como se muestra en la Fig. (*a*). La sección del acero es de 18 cm², mientras que la del cobre es de 60 cm². Ambos cilindros tienen la misma longitud antes de aplicar la carga. Determinar el aumento de temperatura del sistema necesario para colocar toda la carga en el cilindro de cobre. La placa de cubierta de la parte superior del conjunto es rígida, y para el cobre $E = 1,1\times10^6$ kg/cm², $\alpha = 17\times10^{-6}$ °C, mientras que para el acero $E = 2,1\times10^6$ kg/cm², $\alpha = 11\times10^{-6}$ °C.

Un procedimiento para resolver este problema es suponer que se suprimen la carga y la placa superior de tapa, permitiendo al sistema dilatarse libremente en sentido vertical por un aumento de temperatura ΔT. En estas condiciones, los extremos superiores de los cilindros adoptan las posiciones representadas en la Fig. (*b*) por líneas de trazos.

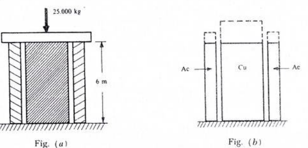


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Naturalmente, el cilindro de cobre se dilata hacia arriba más que el de acero, porque el coeficiente de dilatación lineal del cobre es mayor que el del acero. La dilatación del acero es

$$(11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

mientras que la del cobre es

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

No cabe duda de que ésta no es la situación real, porque todavía no se ha considerado la carga de 25.000 kg. Si toda esta carga axial ha de ser soportada por el cobre, solo será comprimido él, y la compresión viene dada por

$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{25.000(600)}{(60)(1{,}1 \times 10^6)}$$

El enunciado del problema dice que el aumento de temperatura ΔT es el preciso para que el cobre soporte toda la carga. Por tanto, la longitud del cobre aumentada, representada por las líneas de trazos en el esquema anterior, disminuirá por efecto de la fuerza, y la dilatación total será la causada por el aumento de temperatura menos la compresión debida a la carga. La variación de longitud del acero es debida solo al cambio de temperatura. En consecuencia, podemos escribir

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) - \frac{25.000(600)}{(60)(1{,}1 \times 10^6)} = (11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) \quad \text{o} \quad \Delta T = 63^\circ \text{ C}$$

12. La barra rígida AD está articulada en A, y unida a las BC y ED, como se ve en la Fig. (*a*). Todo el sistema está al principio sin tensiones y son despreciables los pesos de las barras. La temperatura de la barra BC desciende 30° C y la de la barra ED aumenta los mismos 30° C. Despreciando toda posibilidad de pandeo lateral, hallar las tensiones normales en las barras BC y ED. Para BC, que es de bronce, suponer $E = 9{,}8 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}$/°C, y para ED, que es de acero, tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y $\alpha = 11 \times 10^{-6}$/°C. La sección de BC es de 6 cm² y la de ED de 3 cm².

Expresemos las fuerzas aplicadas sobre AD por P_{ac} y P_{br} y supongamos que actúan en las direcciones representadas en el diagrama de cuerpo en libertad de la Fig. (*b*). Como AD gira rígidamente alrededor de A (como se representa por la línea de trazos), tenemos $\Delta_{br}/26 = \Delta_{ac}/65$, donde Δ_{br} y Δ_{ac} representan el acortamiento y el alargamiento axiales de BC y DE, respectivamente.

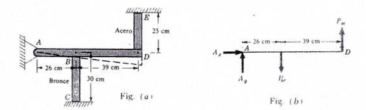


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

La variación total de longitud de BC está compuesta por un acortamiento debido al descenso de temperatura y el debido a la fuerza axial P_{br}. La variación total de longitud de DE está compuesta por un alargamiento debido al aumento de temperatura y otro producido por la fuerza P_{ac}. Por tanto, tenemos

$$\frac{2}{5}\left[(11 \times 10^{-6})(25)(30) + \frac{P_{ac}(25)}{(3)(2{,}1 \times 10^6)}\right] = -(17{,}7 \times 10^{-6})(30)(30) + \frac{P_{br}(30)}{(6)(9{,}8 \times 10^5)}$$

o

$$5{,}102P_{br} - 1{,}587P_{ac} = 19.230$$

De la estática,

$$\Sigma M_A = 26P_{br} - 65P_{ac} = 0$$

y resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, $P_{ac} = 1.720$ kg, $P_{br} = 4.300$ kg.

Utilizando la expresión $\sigma = P/A$ para cada barra, obtenemos $\sigma_{ac} = 573$ kg/cm² y $\sigma_{br} = 716$ kg/cm².

13. Considerar la armadura articulada, estáticamente indeterminada, de la Fig. (*a*). Antes de aplicar la carga P, todo el sistema está libre de tensiones. Hallar la fuerza axial producida en cada barra por la fuerza vertical P. Las dos barras exteriores son idénticas y tienen una sección A_i, mientras que la sección de la intermedia es A_v. Todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad E.

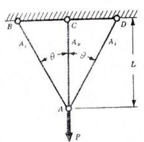


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

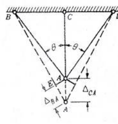


Fig. (*c*)

En la Fig. (*b*) aparece el diagrama de cuerpo en libertad de la articulación A, expresando por F_1 y F_2 las fuerzas axiales (kg) en las barras vertical e inclinadas. Por la estática, tenemos

$$\Sigma F_v = F_1 + 2F_2 \cos\theta - P = 0$$

Esta es la única ecuación de la estática de que disponemos, pues hemos hecho uso de la simetría al decir que las fuerzas son iguales en las dos barras inclinadas. Como contiene dos incógnitas, F_1 y F_2, el sistema de fuerzas es estáticamente indeterminado, por lo que hemos de examinar las deformaciones para obtener otra ecuación. Bajo la acción de la carga P, las barras adoptan las posiciones representadas por líneas de trazos en la Figura (*c*).

Como las deformaciones del sistema son *pequeñas*, la forma geométrica general permanece prácticamente inalterada y se puede considerar que el ángulo $BA'A$ vale θ. El triángulo AEA' es rectángulo y AE, que en realidad es un arco con radio igual a la longitud de las barras inclinadas, es perpendicular a BA'. Por tanto, el alargamiento de la barra vertical está representado por AA' y el de las barras inclinadas por EA'. De este triángulo pequeño tenemos la relación

$$\Delta_{BA} = \Delta_{CA} \cos\theta$$

donde Δ_{BA} y Δ_{CA} representan alargamientos de las barras inclinadas y vertical, respectivamente.

Como esas barras están sometidas a carga axial se pueden hallar los alargamientos por la fórmula $\Delta = PL/AE$. De esta expresión, tenemos

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L/\cos\theta)}{A_iE} \quad \text{y} \quad \Delta_{CA} = \frac{F_1L}{A_vE}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior que relaciona Δ_{BA} y Δ_{CA}, tenemos

$$\frac{F_2 L}{A_i E \cos\theta} = \frac{F_1 L}{A_v E}\cos\theta \quad \text{o} \quad F_2 = F_1\left(\frac{A_i}{A_v}\right)\cos^2\theta$$

Sustituyendo en la ecuación de la estática hallamos $F_1 + 2F_1(A_i/A_v)\cos^3\theta = P$

o

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_i/A_v)\cos^3\theta} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{P\cos^2\theta}{(A_v/A_i) + 2\cos^3\theta}$$

14. En la armadura articulada estudiada en el Problema 13, cada barra inclinada tiene una sección de 6 cm², la vertical de 12 cm², $BC = CD = 30$ cm, $CA = 40$ cm, y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Si la carga aplicada es $P = 6.000$ kg, determinar la tensión normal en cada barra y la deformación vertical del punto A.

Aquí, tenemos $A_i = 6$ cm², $A_v = 12$ cm², $\cos\theta = 40/50 = 4/5$, y $P = 6.000$ kg. Del Problema 13, la fuerza axial en la barra vertical CA es

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_i/A_v)\cos^3\theta} = \frac{6.000}{1 + 2(6/12)(4/5)^3} = 3.968 \text{ kg}$$

La tensión normal en la barra CA es $\sigma_1 = F_1/A_v = 3.968/12 = 330$ kg/cm².

La fuerza axial en cada una de las barras inclinadas es, del Problema 13,

$$F_2 = \frac{P\cos^2\theta}{(A_v/A_i) + 2\cos^3\theta} = \frac{6.000(4/5)^2}{(12/6) + 2(4/5)^3} = 1.270 \text{ kg}$$

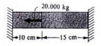
La tensión normal en cada barra inclinada es $\sigma_2 = F_2/A_i = 1.270/6 = 210$ kg/cm².

La deformación vertical del punto A es, del Problema 13,

$$\Delta_{CA} = \frac{F_1 L}{A_v E} = \frac{(3.968)(40)}{(12)(2{,}1 \times 10^6)} = 0{,}0063 \text{ cm}$$

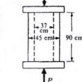
PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Una barra cuadrada de 5 cm de lado está sujeta rígidamente entre los muros y cargada con una fuerza axial de 20.000 kg, como se ve en la figura. Determinar las reacciones en los extremos de la barra y el alargamiento de la parte derecha. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².



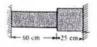
Sol. Reacción izquierda = 12.000 kg, reacción derecha = 8.000 kg
Alargamiento = 0,0023 cm

16. Un corto tubo de fundición, de sección cuadrada, está lleno de hormigón. La dimensión exterior de la fundición es de 45 cm y el espesor de la pared de 4 cm. El conjunto está comprimido por una fuerza axial P de 70.000 kg aplicada a placas de tapa infinitamente rígidas, como se muestra en la figura. Determinar la tensión en cada material y el acortamiento del elemento. Para el hormigón, tomar $E = 1{,}75 \times 10^5$ kg/cm² y para la fundición $E = 1{,}05 \times 10^6$ kg/cm².



Sol. $\sigma_f = 62{,}4$ kg/cm²
$\sigma_h = 10{,}4$ kg/cm²
$\Delta = 0{,}00535$ cm

17. Dos barras inicialmente rectas están unidas entre sí y sujetas a apoyos, como se ve en la figura. La de la izquierda es de bronce para el cual $E = 9{,}8 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}$/°C, y la de la derecha es de aluminio, para el cual $E = 7 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 22{,}2 \times 10^{-6}$/°C. Las secciones de las barras de bronce y de aluminio miden, respectivamente, 6 cm² y 9 cm². Se supone que el sistema está inicialmente libre de tensiones y que, entonces, la temperatura desciende 22° C.



(*a*) Si los apoyos no ceden, hallar la tensión normal en cada barra.
(*b*) Si el apoyo derecho cede 0,012 cm, hallar la tensión normal en cada barra, suponiendo su peso despreciable.
Sol. (*a*) $\sigma_{br} = 420$ kg/cm², $\sigma_{al} = 280$ kg/cm²; (*b*) $\sigma_{br} = 280$ kg/cm², $\sigma_{al} = 180$ kg/cm²

18. Un tubo de acero de 5 cm y 4,4 cm de diámetros exterior e interior, respectivamente, rodea a un cilindro macizo de bronce de 3,75 cm de diámetro, unidos ambos a una placa de cubierta rígida, en cada extremo. El conjunto está exento de tensiones a la temperatura de 25° C. Si la temperatura aumenta hasta 120°, determinar las tensiones en cada material. Para el bronce, $E = 9{,}8 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 = 10^{-6}$/°C; para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 11 \times 10^{-6}$/°C. *Sol.* $\sigma_a = 720$ kg/cm², $\sigma_{br} = 290$ kg/cm²

19. Un pilar corto de hormigón armado está sometido a una carga de compresión axial. Ambos extremos están cubiertos por placas infinitamente rígidas, de modo que las deformaciones totales del acero y el hormigón son iguales. Si la tensión producida en el hormigón es de 65 kg/cm², hallar la correspondiente al acero. Tomar, para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², y considerar $n = 12$ ($n = E_a/E_h$). Despreciar los efectos de expansión lateral del hormigón y el acero bajo esa carga. *Sol.* $\sigma_a = 780$ kg/cm²

20. Una barra compuesta está constituida por una tira de cobre entre dos placas de acero laminado en frío. Los extremos del conjunto están cubiertos por placas infinitamente rígidas, y se aplica a la barra una carga *P*, por medio de una fuerza que actúa en cada una de las placas rígidas, como se ve en la Fig. (*a*). La anchura de todas las barras es de 10 cm, las placas de acero tienen un espesor de 0,6 cm cada una y el de la de cobre es de 1,8 cm. Determinar la carga máxima *P* que puede aplicarse. La carga de rotura del acero es 5.600 kg/cm² y la del cobre 2.100 kg/cm². Es admisible un coeficiente de seguridad de 3, basado en la carga de rotura de cada material. Para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y para el cobre $E = 9 \times 10^5$ kg/cm². *Sol.* $P = 32.200$ kg

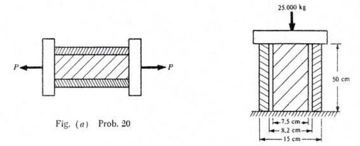


Fig. (*a*) Prob. 20

Fig. (*b*) Prob. 21

21. Un cilindro recto circular de aluminio rodea a otro de acero, como se ve en la Fig. (*b*), y se aplica la carga axial de compresión de 25.000 kg a través de las placas de cubierta infinitamente rígidas, representadas. Si el cilindro de aluminio es 0,025 cm más largo que el de acero antes de aplicar ninguna carga, hallar la tensión normal en cada uno de ellos cuando la temperatura haya descendido 30° C y esté actuando toda la carga. Tomar, para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 11 \times 10^{-6}$/°C, y para el aluminio, $E = 7 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 22{,}2 \times 10^{-6}$/°C.
Sol. $\sigma_a = 125$ kg/cm², $\sigma_{al} = 155$ kg/cm²

22. La barra horizontal rígida *AB* está soportada por tres cables verticales, como se ve en la Fig. (*a*) siguiente, y soporta una carga de 12.000 kg. El peso de *AB* es despreciable y el sistema está exento de tensiones antes de apli-

car los 12.000 kg. Después de aplicados, la temperatura de los tres cables aumenta 14° C. Hallar la tensión en cada cable y la posición de la carga aplicada para que AB permanezca horizontal. Tomar para el cable de acero $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°C$; para el cable de bronce $E = 9{,}8 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}/°C$, y el de cobre $E = 1{,}2 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 16 \times 10^{-6}/°C$. Se desprecia la posibilidad de pandeo lateral de cualquiera de los cables. En la figura aparecen las longitudes y secciones de los cables.
Sol. $\sigma_{ac} = 2.500$ kg/cm, $\sigma_{br} = 1.950$ kg/cm², $\sigma_{cu} = 1.750$ kg/cm², $x = 13{,}75$ cm

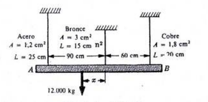


Fig. (*a*) Prob. 22

Fig. (*b*) Prob. 23

23. La barra AC es totalmente rígida, está articulada en A y unida a las DB y CE como se ve en la Fig. (*b*). El peso de AC es de 5.000 kg y el de las otras dos barras es despreciable. Si la temperatura de las barras DB y CE aumenta 40° C, hallar las tensiones producidas en esas barras. DB es de cobre, para el cual $E = 1{,}05 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}/°C$ y la sección 12 cm², mientras que la CE es de acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°C$ y la sección 6 cm². Despreciar la posibilidad de pandeo lateral en las barras.
Sol. $\sigma_{ac} = 743$ kg/cm², $\sigma_{cu} = -327$ kg/cm²

24. Considerar la barra rígida BD que está soportada por los dos cables que aparecen en la Fig. (*c*). Los cables están inicialmente exentos de tensión y los pesos de todos los elementos son despreciables. Hallar la tracción en cada cable cuando se ha aplicado la carga P al extremo de la barra. Los dos cables tienen el mismo módulo de elasticidad.

Sol. Fuerza en $AD = \dfrac{2P}{A_1L_2^3H/2A_2L_1^3 + 2H/L_2}$, fuerza en $AC = \dfrac{2P}{4HA_2L_1^3/A_1L_2^3 + H/L_1}$

25. Considerar tres barras idénticas conectadas con pasador, dispuestas como se indica en la Fig. (*d*), y que soportan la carga P. Las barras forman entre sí ángulos de 120°. Hallar la fuerza axial en cada una y el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga. Despreciar la posibilidad de pandeo lateral en las barras.
Sol. Fuerza en cada una de las barras superiores $= P/3$, fuerza en la barra inferior $= -2P/3$, $\Delta_v = 2PL/3AE$

26. Las tres barras representadas en la Fig. (*e*) soportan la carga vertical de 2.500 kg. Las barras están libres de tensión y unidas por un pasador en A antes de aplicar la carga. Si se coloca ésta gradualmente, y simultáneamente decrece la temperatura de las tres barras 8° C, calcular la tensión en cada una de ellas. Las dos extremas son de bronce y sección de 2,4 cm², y la central de acero y sección 1,8 cm². Para el bronce, $E = 9 \times 10^5$ kg/cm² y $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}/°C$, y para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°C$.
Sol. $\sigma_{ac} = 718$ kg/cm², $\sigma_{br} = 356$ kg/cm²

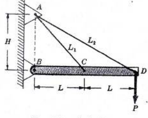


Fig. (*c*) Prob. 24

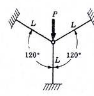


Fig. (*d*) Prob. 25

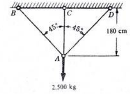


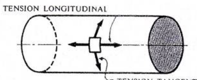
Fig. (*e*) Prob. 26

CAPITULO 3

Cilindros y esferas de paredes delgadas

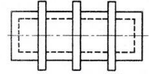
En los Capítulos 1 y 2 hemos examinado varios casos concernientes a tensiones normales uniformes que actúan en barras. Otra aplicación de las tensiones normales repartidas uniformemente se presenta en el estudio aproximado de cilindros y esferas de paredes delgadas sometidos a presión interior de gases o líquidos.

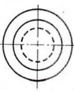
NATURALEZA DE LAS TENSIONES. Si el cilindro representado en el croquis adjunto está sometido a una presión interior uniforme en las paredes se producen tensiones normales en dos direcciones. Las que actúan en la dirección del eje geométrico del cilindro se llaman axiales o longitudinales y las que lo hacen en una dirección perpendicular, tangentes. Se supone que estas tensiones actúan sobre un elemento como el representado, y lo hacen en el plano de la pared del cilindro.



HIPOTESIS. Se supone que las tensiones de tracción o compresión que existen en la pared del cilindro o esfera se pueden considerar *uniformemente* distribuidas en el espesor de la pared. Asimismo, se supone que las cargas, tensiones y deformaciones en las membranas cilíndricas son simétricas respecto al eje del cilindro. Véanse los Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10. Se considera que las tensiones y deformaciones en las membranas esféricas son simétricas respecto al centro de la esfera. Véase el Problema 7.

LIMITACIONES. La relación del espesor de la pared al radio de curvatura no debe exceder de 0,10 aproximadamente. Además no debe haber discontinuidades en la estructura. El método simplificado que se presenta aquí no permite considerar anillos de refuerzo en las membranas cilíndricas, como los representados en la figura de abajo, ni da una indicación precisa de las tensiones y deformaciones en la proximidad de las placas de cierre de los extremos en los depósitos de presión cilíndricos. Aun con todo, el método es satisfactorio en muchos casos.





Los problemas que se presentan se refieren a las tensiones que se producen por una presión interna que actúa en un cilindro o esfera. Las fórmulas de las diversas tensiones serán correctas si se invierte

el sentido de la presión, esto es, si sobre el depósito actúa una presión exterior. Sin embargo, debe observarse que debe tomarse en cuenta otra consideración, que se escapa del objeto de este libro; no solo hay que estudiar la distribución de tensiones, sino que hay que hacer otro estudio de naturaleza totalmente diferente para determinar la carga para la cual la membrana *pandea* debido a la compresión. Puede producirse un fallo por pandeo o inestabilidad aunque la tensión máxima esté muy por debajo de la tensión máxima de trabajo admisible para el material.

APLICACIONES. Ejemplos corrientes de cilindros y esferas de paredes delgadas son los tanques y depósitos de almacenamiento de líquidos, tuberías de agua, calderas, cascos submarinos y ciertos componentes de los aeroplanos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar un cilindro de paredes delgadas cerrado con placas en sus extremos y sometido a una presión interior uniforme p. El espesor de la pared es h y el radio interior r. Despreciando los efectos limitativos de las placas extremas, calcular las tensiones tangentes y longitudinal que existen en las paredes por causa de esta carga.

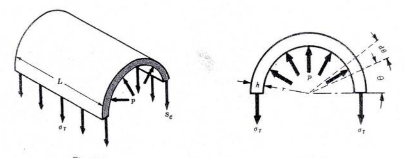


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Para determinar la tensión tangente σ_T consideremos que se suprime del depósito una parte del cilindro de longitud L. El diagrama de cuerpo en libertad de una mitad de esta parte tiene el aspecto que aparece en la Fig. (*a*). Obsérvese que se ha cortado el cuerpo de modo que el efecto, originalmente *interno* (σ_T), aparece ahora en este cuerpo libre como una fuerza *exterior*. La Fig. (*b*) muestra las fuerzas que actúan en una sección.

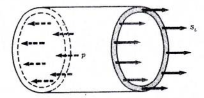
Las componentes horizontales de las presiones radiales se anulan entre sí en virtud de la simetría respecto al eje vertical. En la dirección vertical tenemos la siguiente ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_v = -2\sigma_T hL + \int_0^\pi pr(d\theta)(\text{sen }\theta)L = 0$$

e integrando $$2\sigma_T hL = -prL[\cos\theta]_0^\pi \quad \text{y} \quad \sigma_T = \frac{pr}{h}$$

Obsérvese que se podría haber obtenido la fuerza vertical resultante, debida a la presión p, multiplicando la presión por la proyección *horizontal* de la *superficie* sobre la que actúa esa presión.

Para determinar la tensión longitudinal σ_L consideremos una sección dada al cilindro normal a su eje geométrico. En la figura adjunta se da el diagrama de cuerpo en libertad de la parte de cilindro restante. Para el equilibrio,



$$\Sigma F_h = -p\pi r^2 + 2\pi r h \sigma_L = 0 \qquad \text{y} \qquad \sigma_L = \frac{pr}{2h}$$

En consecuencia, la tensión tangente es doble de la longitudinal. Así, si se hiela el agua en una tubería cerrada, el tubo se romperá a lo largo de una línea que corra longitudinalmente a lo largo del cilindro. Estas expresiones sencillas de las tensiones no son válidas en la inmediata proximidad de las placas extremas de cierre.

2. Una tubería de agua de fundición de 20 cm de diámetro interior ha de estar sometida a una presión interior de 14 kg/cm². ¿Cuál es el espesor mínimo del tubo para que la tensión no exceda de la de trabajo de 250 kg/cm²?

Por el Problema 1 sabemos que la tensión en la dirección tangencial es la que se considera siempre para el diseño. Por tanto,

$$\sigma_T = \frac{pr}{h}, \qquad 250 \text{ kg/cm}^2 = \frac{(14 \text{ kg/cm}^2)(10 \text{ cm})}{h} \qquad \text{y} \qquad h = 0{,}56 \text{ cm}$$

3. El tanque de un compresor de aire consiste en un cilindro cerrado por dos extremos semiesféricos. El cilindro tiene 60 cm de diámetro interior y está sometido a una presión interna de 35 kg/cm². Si el material es un acero cuyo límite de fluencia es 2.500 kg/cm² y se utiliza un coeficiente de seguridad de 3,5, calcular el espesor de pared necesario. Despreciar los efectos locales en la unión del cilindro y la semiesfera.

Los extremos del tanque están cerrados, por lo que, de acuerdo con el Problema 1, existe una tensión tangente en la pared del cilindro dada por $\sigma_T = pr/h$ y otra longitudinal dada por $\sigma_L = pr/2h$.

Como la tensión tangente es el doble de la longitudinal, es la crítica para el proyecto, y no debe exceder de la máxima tensión de trabajo admisible, 2.500/3,5 kg/cm². Por tanto, para la tensión tangente tenemos $\frac{2.500}{3{,}5} = \frac{35(30)}{h}$ o $h = 1{,}47$ cm.

Un estudio más completo exigiría la consideración de las tensiones en los extremos semiesféricos.

4. Una caldera de vapor debe tener 150 cm de diámetro interior. Está sometida a una presión interna de 8,5 kg/cm². ¿Cuál será la tracción en el vaso cilíndrico por centímetro de costura longitudinal? ¿Por centímetro de costura circular?

Por el Problema 1 sabemos que la presión interior que actúa en un cilindro hueco da origen a una tensión tangente $\sigma_T = pr/h$, y una longitudinal $\sigma_L = pr/2h$. Para nuestros datos, $p = 8{,}5$ kg/cm², $r = 75$ cm, podemos escribir

$$(1) \quad \sigma_T = \frac{8{,}5(75)}{h} = \frac{637{,}5}{h} \qquad \text{y} \qquad (2) \quad \sigma_L = \frac{8{,}5(75)}{2h} = \frac{318{,}75}{h}$$

Aunque el espesor h es desconocido, podemos calcular la fuerza por unidad de longitud de cada una de las costuras. Representemos la longitudinal por T_T. La inspección del primer croquis del Problema 1 indica que T_T viene dada por la relación sencilla

$$(3) \quad T_T = \sigma_T \cdot h$$

La dirección de T_T coincide, evidentemente, con la de σ_T representada. La comparación de las ecuaciones (1) y (3) indica que $T_T = 637{,}5$ kg/cm. Por tanto, la tensión por centímetro de costura longitudinal es de 637,5 kg.

Del mismo modo, podemos expresar la fuerza por unidad de longitud de costura circular por T_L. La inspección del tercer croquis del Problema 1 indica que

$$(4) \quad T_L = \sigma_L \cdot h$$

siendo la dirección de T_L la misma que la de σ_L. La comparación de las ecuaciones (2) y (4) indica que $T_L = 318{,}75$ kg/cm, por lo que la tensión por centímetro de costura circular es de 318,75 kg.

5. Un depósito de reserva vertical de acero, esto es, un tanque cilíndrico abierto por arriba y que tiene el eje vertical, tiene 240 cm de diámetro interior y 25 m de altura. El tanque está lleno de agua, con densidad 1.000 kg/m³ y el material es acero de estructuras con un límite de fluencia de 2.500 kg/cm y se utiliza un coeficiente de seguridad 2. ¿Cuál es el espesor de chapa necesario en el fondo del tanque si se supone que la costura longitudinal por soldadura es tan fuerte como el metal? ¿Qué espesor se necesita si la costura tiene solamente el 85 % de la eficacia del metal macizo?

La presión p (en cualquier dirección) en la base del tanque está dada por la fórmula $p = wh$, donde w representa el peso del líquido por unidad de volumen y h la altura de la columna de agua sobre la base. Esta fórmula es evidente, si se considera que la presión en un metro cuadrado de la base es igual al peso de una columna de agua de un metro cuadrado de sección y h metros de altura. Por tanto, la presión en la base es

$$p = 1.000(25) = 25.000 \text{ kg/m}^3 \quad \text{o} \quad p = 2{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Como esta presión es hidrostática, actúa en todas las direcciones con la misma intensidad, y en particular radialmente, contra la pared interior del depósito, como se ve en la figura adjunta. Como puede verse en la expresión $p = wh$, la presión radial decrece hacia la parte alta del depósito, como se ha representado en el croquis, estando el máximo en la base, por lo que es ésta la zona que debe considerarse para el diseño.

25 m

2.5 kg cm² 2.5 kg/cm²

Como la parte superior del depósito está abierta, no hay tensión longitudinal, y por el Problema 1 sabemos que la tangente en cualquier parte del tanque está dada por $\sigma_T = pr/h$. Considerando la zona de la base, esta ecuación se convierte en

$$\frac{2.500}{2} = \frac{2{,}5(120)}{h} \quad \text{o} \quad h = 0{,}24 \text{ cm}$$

Esto supone que las costuras longitudinales son tan resistentes como el metal macizo. En la realidad, este espesor se incrementaría ligeramente para evitar los efectos de la corrosión.

Si las costuras longitudinales solamente tienen el 85 % de la resistencia del metal macizo, el espesor necesario es $h = 0{,}24/0{,}85 = 0{,}283$ cm.

6. Calcular el aumento de radio del cilindro considerado en el Problema 1, producido por la presión interna p.

Consideremos las cargas longitudinales y tangentes por separado. Debido a la presión radial p *solamente*, la tensión tangente está dada por $\sigma_T = pr/h$, y como $\sigma = E\epsilon$, la deformación tangencial es $\epsilon_T = pr/Eh$.

Hay que observar que ϵ_T es una deformación unitaria. La longitud sobre la que actúa es la circunferencia del cilindro, que es $2\pi r$, por lo que el alargamiento total de la circunferencia vale

$$\Delta = \epsilon_T(2\pi r) = 2\pi pr^2/Eh$$

La longitud final de la circunferencia es, pues: $2\pi r + 2\pi pr^2/Eh$. Dividiendo esta circunferencia por 2π hallamos que el nuevo radio del cilindro es: $r + pr^2/Eh$ y el aumento de radio: pr^2/Eh.

Debido *solo* a la presión axial p, se producen tensiones longitudinales $\sigma_L = pr/2h$, que dan origen a deformaciones longitudinales $\epsilon_L = pr/2Eh$. Como en el Capítulo 1, un aumento en la dirección de la carga, que aquí es la dirección longitudinal, está acompañado por una disminución en la dirección perpendicular. Por tanto, en este caso, disminuye la dimensión en sentido circular. La relación entre la deformación en sentido lateral y la en dirección a la carga se definió en el Capítulo 1 como relación de Poisson, representada por μ. En consecuencia,

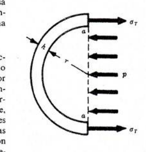
la deformación anterior ϵ_L induce una deformación tangencial igual a $-\mu\epsilon_L$ y si representamos la deformación por ϵ_T' tenemos $\epsilon_T' = -\mu pr/2Eh$, tendiendo a decrecer el radio del cilindro, como indica el signo negativo.

Por consideraciones en un todo análogas a las hechas para el aumento de radio debido solamente a la carga radial, la disminución de radio correspondiente a la deformación ϵ_T' está dada por $\frac{\mu}{2} \cdot \frac{pr^2}{Eh}$. El aumento de radio total, debido a la presión interna p, es, pues,

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh} - \frac{\mu}{2} \cdot \frac{pr^2}{Eh} = \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

7. Considerar una envuelta esférica cerrada, de pared delgada, sometida a una presión interna uniforme p. El radio interior es r y el espesor de pared h. Deducir una expresión de la tensión de tracción que existe en la pared.

Para trazar el esquema de cuerpo en libertad consideremos la mitad de la esfera. Sobre este cuerpo actúa la presión interior aplicada p, así como las fuerzas que ejerce sobre ella la otra mitad suprimida. A causa de la simetría de cargas y deformaciones, estas fuerzas pueden representarse como tensiones de tracción tangentes σ_T, como se ve en el esquema adjunto.



Este diagrama de cuerpo en libertad representa las fuerzas que actúan en la semiesfera, mediante la proyección de ésta sobre un plano vertical. En realidad, la presión p actúa sobre toda la superficie interior de la semiesfera, en dirección perpendicular a la superficie, en cada punto; pero, como se dijo en el Problema 1, es admisible considerar la fuerza que ejerce esta misma presión p sobre la *proyección* de esa superficie, que en este caso es el área vertical circular representada por *a-a*. Esto es posible porque la semiesfera es simétrica respecto al eje horizontal y las componentes verticales de la presión se anulan entre ellas. La tensión de tracción σ_T está producida solamente por las componentes de la presión paralelas al eje horizontal. Para que exista equilibrio, tenemos

$$\Sigma F_h = \sigma_T \cdot 2\pi rh - p\pi r^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \sigma_T = \frac{pr}{2h}$$

Por simetría, esta tensión tangente es la misma en todas direcciones, en cualquier punto de la pared de la esfera.

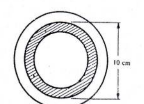
8. Un tanque esférico de 18 m de diámetro se utiliza para almacenar gas. La chapa de envuelta es de 12 mm de espesor y la tensión de trabajo del material de 1.250 kg/cm². ¿Cuál es la máxima presión del gas p admisible?

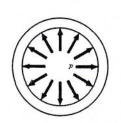
Del Problema 7, la tensión de tracción es uniforme en todas las direcciones y está dada por

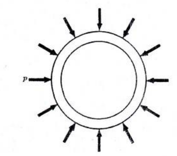
$$\sigma_T = \frac{pr}{2h} \qquad \text{y, sustituyendo,} \qquad 1.250 = \frac{p(900)}{2(1,2)} \qquad \text{y} \qquad p = 3,33 \text{ kg/cm}^2$$

9. Considerar un tanque de presión compuesto por dos cilindros delgados coaxiales, como se representa más adelante. En el estado anterior al montaje, hay una ligera «interferencia» entre las dos envueltas, esto es, la interior es demasiado grande para deslizar dentro de la exterior. El cilindro exterior se calienta, se coloca sobre el interior y se le enfría, consiguiendo así un «ajuste por contracción». Si los dos son de acero y el diámetro medio del conjunto es de 10 cm, hallar las tensiones tangentes en cada envuelta, producidas por la «contracción», si la interferencia inicial (de los diámetros) era de 0,025 cm. El espesor de la pared interior es de 0,25 cm y el de la exterior 0,20 cm.

Evidentemente, hay una presión interfacial p entre las caras contiguas de las dos envueltas, como se ve en la figura.







TANQUE DE PRESION CILINDRO EXTERIOR CILINDRO INTERIOR

Hay que observar que no hay aplicadas cargas exteriores. Se puede considerar que la presión p aumenta el diámetro del cilindro exterior y disminuye el del interior, para que pueda encajar en el interior de aquél. En el Problema 6 se halló que la dilatación radial de un cilindro, debida a una presión radial p, era pr^2/Eh. En este problema no interviene ninguna fuerza longitudinal. El aumento del radio en la envuelta exterior debido a p, más la disminución del radio de la interior por la misma causa, debe ser igual a la interferencia inicial entre los radios, o sea, 0,025/2. Así, pues, tenemos

$$\frac{p(5)^2}{(2{,}1 \times 10^6)(0{,}25)} + \frac{p(5)^2}{(2{,}1 \times 10^6)(0{,}2)} = 0{,}0125 \quad \text{o} \quad p = 117 \text{ kg/cm}^2$$

Esta presión, representada en las figuras de más arriba, actúa sobre los cilindros después de haber encajado el exterior sobre el interior. En el interior esta presión p da origen a una tensión

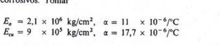
$$\sigma_T = \frac{pr}{h} = -\frac{117(5)}{0{,}25} = -2.340 \text{ kg/cm}^2$$

En el cilindro exterior la tensión tangente debida a la presión p es

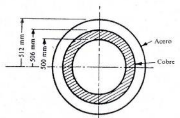
$$\sigma_T' = \frac{pr}{h} = -\frac{117(5)}{0{,}20} = -2.925 \text{ kg/cm}^2$$

Si, por ejemplo, el depósito está sometido a una presión interna uniforme, esas tensiones de «ajuste» se sumarían algebraicamente a las que se hallarían utilizando las fórmulas dadas en el Problema 1.

10. Como se ve en la figura, el cilindro delgado de acero ajusta exactamente sobre el cilindro interior de cobre. Hallar las tensiones tangentes en cada envuelta debidas a un aumento de temperatura de 35° C. No se considerarán los efectos producidos por la dilatación longitudinal que la acompaña. Esta disposición se usa a veces para almacenar líquidos corrosivos. Tomar



$$E_a = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 11 \times 10^{-6}/°\text{C}$$
$$E_{cu} = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}/°\text{C}$$



El método más sencillo es considerar primero que las dos envueltas están separadas una de otra y ya no están en contacto.

Debido al aumento de temperatura de 35°, la circunferencia del cilindro de acero aumenta

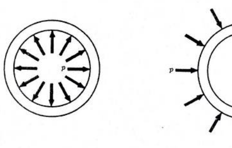
$$2\pi(50{,}9)(35)(11 \times 10^{-6}) = 0{,}123 \text{ cm}$$

y la del cilindro de cobre,

$$2\pi(50{,}3)(35)(17{,}7 \times 10^{-6}) = 0.196 \text{ cm}$$

Por lo que la «interferencia» entre los radios, esto es, la diferencia entre ellos (debida al calentamiento), es $\dfrac{0{,}196 - 0{,}123}{2\pi} = 0{,}0116$ cm. No hay cargas externas en ninguno de los cilindros.

Pero, según el enunciado del problema, las superficies contiguas de las dos envueltas están, indudablemente, en contacto después del aumento de temperatura, por lo que debe haber una presión interfacial p entre ellas, esto es, una presión que tienda a aumentar el radio del cilindro de acero y a disminuir el del cilindro de cobre para que éste ajuste dentro de aquél. En el esquema de cuerpo en libertad siguiente se representa esta presión.



CILINDRO DE ACERO CILINDRO DE COBRE

En el Problema 6 se vio que la variación del radio de un cilindro a causa de una presión radial p (sin que actúen fuerzas longitudinales) es pr^2/Eh. Por tanto, el aumento de radio del cilindro de acero debido a p, sumado a la disminución del de cobre por la misma causa, debe ser igual a la «interferencia», o sea, que

$$\frac{p(50{,}9)^2}{(2{,}1 \times 10^6)(0{,}6)} + \frac{p(50{,}3)^2}{(9 \times 10^5)(0{,}6)} = 0{,}0116 \qquad \text{o} \qquad p = 1{,}72 \text{ kg/cm}^2$$

Esta presión interfacial crea la continuidad necesaria en la superficie común de las dos envueltas, cuando están en contacto. Utilizando la fórmula de la tensión tangente $\sigma_T = pr/h$, hallamos que las del acero y el cobre son, respectivamente,

$$\sigma_a = \frac{1{,}72(50{,}9)}{(0{,}6)} = 146 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{y} \qquad \sigma_{cu} = -\frac{1{,}72(50{,}3)}{(0{,}6)} = -144 \text{ kg/cm}^2$$

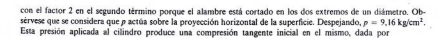
11. Considerar un cilindro de pared delgada de espesor 0,38 cm y diámetro de la envuelta 12 cm. El cilindro está reforzado por una capa de alambre de acero de diámetro 0,1 cm, devanado muy junto, con una tracción de 700 kg/cm² antes de que se aplique ninguna presión interna al cilindro. Determinar la tensión en el alambre y en el cilindro después de aplicar una presión interior radial uniforme de 35 kg/cm².

Como la presión interior es totalmente radial, no hay tensiones en la dirección del eje del cilindro. La presión del alambre sobre la envuelta antes de la aplicación de la carga de 35 kg/cm² es equivalente a una presión radial uniforme, exterior, p que actúa en la envuelta. Es conveniente considerar una longitud de cilindro de un centímetro; como el alambre tiene 0,1 cm de diámetro, 10 vueltas contiguas de alambre refuerzan ese centímetro

de cilindro. En la figura adjunta se representa un diagrama de cuerpo en libertad de las 10 vueltas de alambre en contacto con un centímetro de longitud de cilindro. Solo se dibuja la mitad de cada vuelta, habiendo suprimido la otra mitad y sustituido su efecto por la tracción inicial en el cable, de 700 kg/cm². Indudablemente, no es conveniente dibujar la vuelta entera, porque no conduciría a ninguna relación entre p y la tracción inicial.

Sumando fuerzas verticalmente en el diagrama de cuerpo en libertad, y recordando que hay 10 vueltas de alambre en el único centímetro de longitud considerado, tenemos

$$\Sigma F_v = 12p - 10(2)(700)\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 = 0$$



con el factor 2 en el segundo término porque el alambre está cortado en los dos extremos de un diámetro. Obsérvese que se considera que p actúa sobre la proyección horizontal de la superficie. Despejando, $p = 9{,}16$ kg/cm². Esta presión aplicada al cilindro produce una compresión tangente inicial en el mismo, dada por

$$\sigma_T = \frac{pr}{h} = \frac{9{,}16(6)}{0{,}38} = 145 \text{ kg/cm}^2$$

Si ahora se aplica la carga de 35 kg/cm² en el interior del cilindro, la tensión tangente resultante σ es resistida por el cilindro y el arrollamiento conjuntamente. Esta tensión σ es igual en ambos, por lo que podemos dibujar el esquema de cuerpo en libertad que se acompaña, de la mitad superior de un centímetro de longitud de envuelta, reforzada por 10 vueltas de alambre. Para que haya equilibrio en la dirección vertical, tenemos

$$\Sigma F_v = 35(12)(1) - \sigma[2(0{,}38) + 2(10)\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2] = 0$$

o $\sigma = 460$ kg/cm², donde σ representa la tensión unitaria en el cilindro o en el arrollamiento de alambre.

Por consiguiente, la tensión en la dirección tangente de la envuelta es

$$\sigma_1 = 460 - 145 = 215 \text{ kg/cm}^2$$

y la tensión final en el alambre,

$$\sigma_2 = 700 + 460 = 1.160 \text{ kg/cm}^2$$

Se halla fácilmente que la tensión tangente en el cilindro, sin arrollamiento de alambre, es de 553 kg/cm², lo que aclara el efecto de refuerzo de tal arrollamiento.

PROBLEMAS PROPUESTOS

12. Una botella cilíndrica de aire comprimido para usos de laboratorio lleva aproximadamente en el momento de la entrega una presión de 160 kg/cm². El diámetro exterior es de 25 cm. Calcular el espesor de pared necesario si el acero tiene un límite de fluencia de 2.450 kg/cm² y se acepta un coeficiente de seguridad 2,5.
Sol. 204 cm

13. Para los distritos rurales, el gas combustible de uso doméstico se almacena frecuentemente en cilindros cerrados por extremos semiesféricos o elipsoidales. Considerar uno de esos tanques de 85 cm de diámetro fabricado con acero de límite de fluencia 2.100 kg/cm² y con espesor 1,2 cm. Tomando un coeficiente de seguridad 3, ¿cuál es la presión interior máxima que puede soportar el tanque? *Sol.* $p = 19{,}7$ kg/cm²

14. Un cilindro de pared delgada está cerrado en los dos extremos y contiene aceite a una presión de 8 kg/cm². El diámetro interior es de 40 cm. Si el límite de fluencia del material es de 2.650 kg/cm² y se toma un coeficiente de seguridad 3, determinar el espesor de pared necesario. *Sol.* 0,181 cm

15. Un tanque vertical de almacenamiento de gasolina tiene 25 m de diámetro y está lleno hasta una altura de 12 m con gasolina de densidad 0,74. Si el límite de fluencia de la chapa del depósito es de 2.450 kg/cm² y se acepta un coeficiente de seguridad 2,5, calcular el espesor de pared necesario en el fondo del tanque, despreciando los efectos de momentos localizados en él. *Sol.* $h = 1{,}13$ cm

16. Un tanque esférico para almacenar gas bajo presión tiene 25 m de diámetro y está hecho con acero de estructuras de 16 mm de espesor. El límite de fluencia del material es 2.450 kg/cm² y se admite un coeficiente de seguridad 2,5. Determinar la máxima presión admisible, suponiendo que los cordones de soldadura entre las diversas placas son tan fuertes como el metal macizo. Determinar también la presión admisible si los cordones tienen el 75 % de la resistencia del metal. *Sol.* $p = 2{,}5$ kg/cm², $p = 1{,}88$ kg/cm²

17. Para ayudar a los motoristas que tienen problemas de neumáticos, muchas estaciones de servicio llevan al lugar del accidente un pequeño tanque lleno de aire comprimido. Un tanque típico tiene 30 cm de diámetro y cuando está lleno lleva una presión de 12 kg/cm². El tanque es cilíndrico y está cerrado por extremos semiesféricos. Despreciando los efectos de flexión en la proximidad de la unión de esos dos elementos, calcular el espesor de pared necesario para el cilindro y para la esfera, basados en un coeficiente de seguridad 4. Suponer un límite de fluencia 2.100 kg/cm² para la chapa de acero. *Sol.* Cilindro $h = 0{,}34$ cm, esfera $h = 0{,}17$ cm

18. Calcular el aumento de radio de la envuelta esférica mencionada en el Problema 7, debido a la presión interna.
Sol. $\Delta r = \dfrac{pr^2}{2Eh}(1 - \mu)$

19. Deducir una expresión para el aumento unitario de volumen de un cilindro circular de pared delgada sometido a una presión interna uniforme p. Los extremos del cilindro están cerrados por placas circulares. Suponer que la dilatación radial es constante en toda la longitud.
Sol. $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{pr}{Eh}\left(\dfrac{5}{2} - 2\mu\right)$

20. Calcular el aumento por unidad de volumen de un cilindro circular de acero, de pared delgada, cerrado en ambos extremos y sometido a una presión interior uniforme de 5,5 kg/cm². El espesor de pared es de 1,6 mm, el radio 35 cm y $\mu = 1/3$. Considerar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* $\Delta V/V = 1{,}05 \times 10^{-3}$

21. Considerar un cilindro laminado constituido por una envuelta delgada de acero «encajada» sobre una de aluminio. El espesor de cada una de ellas es de 0,25 cm y el diámetro medio del conjunto 10 cm. La «interferencia» inicial de las dos envueltas antes de la unión es de 0,01 cm medida sobre un diámetro. Hallar la tensión tangente en cada cilindro producida por el «ajuste por contracción». Para el aluminio, $E = 7 \times 10^5$ kg/cm², y para el acero, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* $\sigma_a = 525$ kg/cm², $\sigma_{al} = -525$ kg/cm²

CAPITULO 4

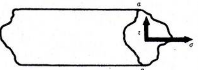
Tensiones de cortante

DEFINICION DE ESFUERZO CORTANTE. Si se hace pasar un plano a través de un cuerpo, una fuerza que actúa a lo largo del plano se llama esfuerzo cortante. Se representará por T.

DEFINICION DE TENSION CORTANTE. El esfuerzo cortante, dividido por la superficie sobre la que actúa, se llama tensión cortante. La representaremos por τ. Por tanto,

$$\tau = \frac{T}{A}$$

COMPARACION DE LAS TENSIONES CORTANTE Y NORMAL. Consideremos una barra cortada por un plano a-a perpendicular a su eje, como se ve en la figura adjunta. Una tensión normal σ es perpendicular a este plano. Es el tipo de tensión considerado en los Capítulos 1, 2 y 3.



Una tensión cortante es la que actúa *a lo largo* del plano, como la τ indicada. Por tanto, la diferencia entre las tensiones normales y cortantes es la *dirección*.

HIPOTESIS. Es necesario hacer alguna hipótesis referente al modo en que se distribuyen las tensiones cortantes y, a falta de un conocimiento más preciso, en todos los problemas de este capítulo se tomarán como uniformes. Por ello, la expresión $\tau = T/A$ indica una tensión cortante media en la superficie.

APLICACIONES. Ejemplos comunes de sistemas que contienen tensiones cortantes son las uniones roblonadas (Problema 7), las probetas de ensayo de madera (Problema 5) y las chavetas usadas para bloquear las poleas a los ejes (Problema 8).

DEFORMACIONES DEBIDAS A TENSIONES CORTANTES. Consideremos la deformación de un elemento plano rectangular cortado de un sólido, en el que se sabe que las fuerzas que actúan son tensiones cortantes τ, en la dirección representada en la Figura (a).

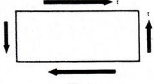


Fig. (a)

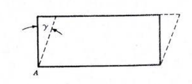


Fig. (b)

Se supone que las caras del elemento paralelas al plano del papel están exentas de carga. Como no actúan tensiones normales en el elemento, las longitudes de los lados del rectángulo elemental original no variarán cuando las tensiones cortantes adopten el valor τ. Sin embargo, habrá una distorsión de los ángulos del elemento primitivamente *rectos*, después de cuya distorsión, debida a las tensiones cortantes, el elemento adopta la configuración representada por líneas de trazos en la Fig. (*b*) anterior.

DEFORMACION POR CORTANTE. La variación del ángulo A del elemento se define como deformación por cortante. Se mide en radianes y se suele representar por γ.

MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE. La relación de la tensión cortante τ a la deformación γ se llama módulo de elasticidad en cortante y se suele representar por G. Así, pues,

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

A G se le conoce también por *módulo de rigidez* y por *coeficiente de elasticidad transversal*.
Las unidades de G son las mismas que las de la tensión cortante, esto es, kg/cm², pues la deformación por cortante no tiene dimensión. La determinación experimental de G y la región de comportamiento lineal de τ y γ se estudiarán en el Capítulo 5. Igual que en el Capítulo 1 se dibujaron diagramas tensión-deformación para cargas normales, se pueden trazar esos diagramas para esfuerzos cortantes y diversos materiales. El aspecto general es el mismo de los del Capítulo 1, pero los valores representados son, naturalmente, diferentes

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar la unión atornillada de la Fig. (*a*) que sigue. La fuerza es de 3.000 kg y el diámetro del perno de 1,2 cm. Determinar el valor medio de las tensiones cortantes que existen en cada uno de los planos *a-a* o *b-b*.

Como no tenemos más datos, podemos suponer que la fuerza P está repartida por igual entre las secciones *a-a* y *b-b*, por lo que actúa una fuerza de 3.000/2 = 1.500 kg, según cada uno de estos planos, sobre una sección de $\frac{1}{4}\pi(1,2)^2 = 1,13$ cm².

Por tanto, la tensión cortante media en cada uno de los planos es $\tau = \dfrac{P/2}{A} = \dfrac{1.500}{1,13} = 1.330$ kg/cm².

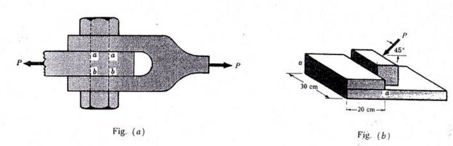


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

2. Con referencia a la Fig. (*b*), la fuerza P tiende a cortar el tope a lo largo del plano *a-a*. Si P = 4.000 kg, determinar la tensión cortante media en el plano *a-a*.

Para producir esta tensión cortante solo interviene la componente horizontal de P, que está dada por 4.000 cos 45° = 2.825 kg.

Por tanto, la tensión cortante media en el plano *a-a* es $\tau = \dfrac{P\cos 45°}{A} = \dfrac{2.825}{30(20)} = 4{,}7\ \text{kg/cm}^2$.

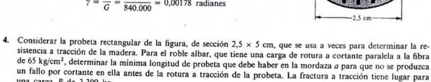
3. El acero de estructuras, de bajo contenido en carbono, tiene una tensión de rotura a cortante de 3.100 kg/cm². Determinar la fuerza P necesaria para punzonar un agujero de 2,5 cm de diámetro en una chapa de 1 cm de espesor de ese acero. Si el módulo de elasticidad en cortante para este material es $8{,}4 \times 10^5$ kg/cm², hallar la deformación por cortante en el borde del agujero cuando la tensión cortante es de 1.500 kg/cm².

Supondremos una distribución uniforme de cortantes en una superficie cilíndrica de 2,5 cm de diámetro y 1 cm de espesor, como se ve en el esquema adjunto. Para que haya equilibrio es necesario que la fuerza P valga

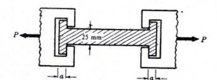
$$P = \tau A = \pi(2{,}5)(1)(3.100) = 24.300 \text{ kg}$$

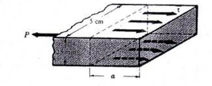
Para determinar la deformación por cortante γ, cuando la tensión cortante τ es de 1.500 kg/cm², emplearemos la definición $G = \tau/\gamma$, obteniendo

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1.500}{840.000} = 0{,}00178 \text{ radianes}$$



4. Considerar la probeta rectangular de la figura, de sección 2,5 × 5 cm, que se usa a veces para determinar la resistencia a tracción de la madera. Para el roble albar, que tiene una carga de rotura a cortante paralela a la fibra de 65 kg/cm², determinar la mínima longitud de probeta que debe haber en la mordaza *a* para que no se produzca un fallo por cortante en ella antes de la rotura a tracción de la probeta. La fractura a tracción tiene lugar para una carga P de 3.300 kg.





Las tensiones cortantes actúan como se ve en la figura, sobre la superficie del extremo derecho, así como otra del extremo izquierdo de la probeta.

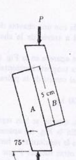
Suponiendo una distribución uniforme de las tensiones cortantes, tenemos

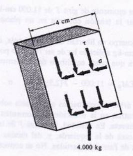
$$\tau = \frac{P}{A}, \qquad 65 = \frac{3.300}{2(5)(a)} \qquad \text{y} \qquad a = 5{,}08 \text{ cm}$$

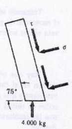
Naturalmente, la longitud de las mordazas será mayor que 5,08 cm para estar seguro de que se produce primero la rotura a tracción.

5. En la industria de la madera se usan a veces tacos inclinados de madera para determinar la resistencia a *cortante-compresión* de las uniones encoladas. Considerar el par de tacos encolados A y B que tienen un espesor de 4 cm en la dirección perpendicular al plano del papel. Determinar la carga de rotura a cortante del encolado si se necesita una fuerza vertical de 4.000 kg para producir la rotura del ensamble. Es de observar que una buena unión encolada hace que una gran proporción de las roturas se produzcan en la madera.

Consideremos el equilibrio del taco inferior A. La reacción del taco superior B sobre el inferior consiste en fuerzas normales y de corte que aparecen como en la perspectiva y la vista ortogonal representadas.







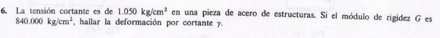
Con referencia al croquis de la derecha, vemos que para que haya equilibrio en la dirección horizontal

$$\Sigma F_h = \tau(5)(4)\ \cos\ 75^\circ - \sigma(5)(4)\ \cos\ 15^\circ = 0 \qquad \text{o} \qquad \sigma = 0{,}268\tau$$

Para que exista equilibrio en la dirección vertical, tenemos

$$\Sigma F_v = 4.000 - \tau(5)(4)\ \text{sen}\ 75^\circ - \sigma(5)(4)\ \text{sen}\ 15^\circ = 0$$

Sustituyendo $\sigma = 0{,}269\tau$ y despejando, hallamos $\tau = 193\ \text{kg/cm}^2$.



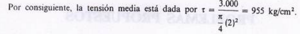
6. La tensión cortante es de 1.050 kg/cm² en una pieza de acero de estructuras. Si el módulo de rigidez G es 840.000 kg/cm², hallar la deformación por cortante γ.

Por definición, $G = \dfrac{\tau}{\gamma}$, por lo que $\gamma = \dfrac{1.050}{840.000} = 0{,}00125$ radianes.

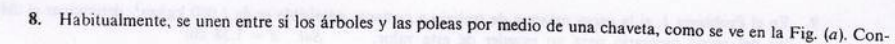
7. Para unir dos placas se utiliza un solo roblón, como se ve en la figura. Si el diámetro del roblón es de 2 cm y la carga P de 3.000 kg, ¿cuál es la tensión de cortante media producida en el roblón?

P
P

Aquí, la tensión cortante media en el roblón es P/A, donde A es la sección de éste.



Por consiguiente, la tensión media está dada por $\tau = \dfrac{3.000}{\frac{\pi}{4}(2)^2} = 955\ \text{kg/cm}^2$.



8. Habitualmente, se unen entre sí los árboles y las poleas por medio de una chaveta, como se ve en la Fig. (*a*). Con-

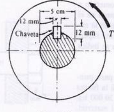


Fig. (*a*)

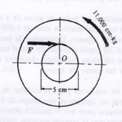


Fig. (*b*)

siderar una polea sometida a un momento de giro T de 11.000 cm-kg enclavada con una chaveta de $1{,}2 \times 1{,}2 \times 7{,}5$ cm a un árbol. Determinar la tensión cortante en un plano horizontal a través de la chaveta.

Trazando un esquema de cuerpo en libertad de la polea sola, como el que aparece en la Fig. (*b*), vemos que el momento de giro de 11.000 cm-kg aplicado ha de ser resistido por una fuerza tangente horizontal F que la chaveta ejerce sobre la polea. Para que exista equilibrio de momentos respecto al centro de la polea, tenemos

$$\Sigma M_0 = 11.000 - F(2{,}5) = 0 \quad \text{o} \quad F = 4.400 \text{ kg}$$

Hay que observar que el árbol ejerce fuerzas adicionales sobre la polea, que no se han representado, que actúan en el centro O y no entran en la ecuación de momentos anterior. En la Fig. (*c*) aparecen las fuerzas resultantes que actúan en la chaveta. En realidad, la fuerza F de la derecha es la resultante de fuerzas repartidas sobre la mitad inferior de la cara de la izquierda, y, del mismo modo, las otras fuerzas F que se representan son las resultantes de sistemas de fuerzas repartidas. No se conoce la verdadera naturaleza de la distribución de fuerzas.

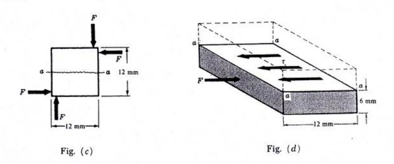


Fig. (*c*) Fig. (*d*)

En la Fig. (*d*) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la parte de chaveta bajo un plano horizontal *a-a* trazado por su sección media. Para que exista equilibrio en la dirección horizontal, tenemos

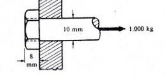
$$\Sigma F_h = 4.400 - \tau(1{,}2)(7{,}5) = 0 \quad \text{o} \quad \tau = 490 \text{ kg/cm}^2$$

Esta es la tensión cortante horizontal en la chaveta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. En el Problema 1, si la carga máxima de trabajo a cortante admisible es de 1.000 kg/cm², determinar el diámetro del perno necesario para no exceder de este valor. *Sol.* $d = 1{,}38$ cm

10. Considerar un perno de acero de 1 cm de diámetro y sometido a una carga de tracción axial de 1.000 kg, como se representa en el esquema adjunto. Determinar la tensión cortante media en la cabeza del perno suponiendo que el cortante actúa sobre una superficie cilíndrica del mismo diámetro que el perno, como se indica por las líneas de trazos. *Sol.* $\tau = 400$ kg/cm²



11. Se ha usado un punzón circular de 2 cm de diámetro para punzonar un agujero en una chapa de 12 mm de espesor. Si la fuerza necesaria para que el punzón atraviese el metal fue de 30.000 kg, determinar la tensión cortante máxima producida en el material. *Sol.* $\tau = 4.000$ kg/cm²

12. En las estructuras se usan muchas veces apoyos de angulares de acero para transferir cargas de vigas horizontales a pilares verticales. Si la reacción de la viga sobre el angular es una fuerza, dirigida hacia abajo, de 5.000 kg, como se ve en la Fig. (*a*), y si esta fuerza la resisten dos roblones de 2,2 cm de diámetro, hallar la tensión cortante media en cada uno de ellos. *Sol.* $\tau = 660\ \text{kg/cm}^2$

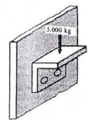


Fig. (*a*) Prob. 12

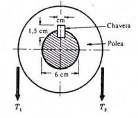


Fig. (*b*) Prob. 13

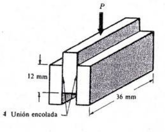


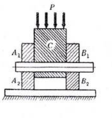
Fig. (*c*) Prob. 14

13. Una polea está enclavada (para evitar el movimiento relativo) a un árbol de 6 cm de diámetro. Los empujes T_1 y T_2, diferentes, de la correa sobre los dos lados de la polea dan origen a un momento de giro de 1.300 kg-cm. La chaveta tiene una sección de 1 × 1,5 cm y 7,5 cm de longitud, como se ve en la Fig. (*b*). Determinar la tensión cortante media en un plano horizontal por la chaveta. *Sol.* $\tau = 60\ \text{kg/cm}^2$

14. Muchas veces se usa el dispositivo de la Fig. (*c*) para determinar la resistencia a cortante de una unión encolada. Si la carga P en la rotura es de 1.200 kg, ¿cuál es la tensión cortante media en la unión en este instante? *Sol.* $\tau = 140\ \text{kg/cm}^2$

15. La Fig. (*d*) representa otro tipo de dispositivo para determinar resistencias a cortante de probetas cilíndricas. La probeta se sujeta entre los tacos A_1, A_2 y B_1, B_2 y se aplica una fuerza P dirigida hacia abajo en el taco C. ¿Qué fuerza hay que aplicar para romper una barra redonda de acero laminado en caliente de 20 mm de diámetro y que tiene una resistencia última a cortante de 7.300 kg/cm²? *Sol.* $P = 46.000$ kg

16. Considerar la estructura de balcón de la Fig. (*e*). El balcón horizontal está cargado con una carga total de 10.000 kg, repartida de un modo simétrico radialmente. El apoyo central es una columna de 50 cm de diámetro y el voladizo está soldado a las superficies superior e inferior de la columna con soldaduras de 11 mm de lado, como se ve en la vista ampliada de la derecha. Determinar las tensiones cortantes medias que existen en la columna y la soldadura. *Sol.* 29 kg/cm²



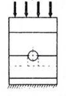
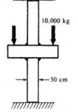


Fig. (*d*) Prob. 15



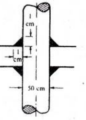
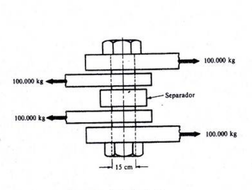


Fig. (*e*) Prob. 16

17. En algunas armaduras de puentes o de cubiertas, las diagonales, los montantes verticales y los cordones horizontales, están unidos entre sí mediante pasadores. Considerar la disposición de barras paralelas representadas en la Fig. (*a*), unidas entre sí por un pasador de acero de 15 cm de diámetro. Si la tracción en cada barra es de 100.000 kg, determinar la tensión cortante media en el pasador. Calcular, además, la deformación correspondiente a esa tensión cortante si $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm². *Sol.* $\tau = 565$ kg/cm², $\gamma = 0{,}00067$

18. Una envuelta cilíndrica delgada, vertical, de 38 m de diámetro, está cargada con una sobrecarga uniformemente repartida a lo largo de su borde superior y está apoyada solo parcialmente en su extremo inferior, como se ve en la Fig. (*b*). Si la carga total sobre la parte superior es de 450.000 kg, y 24 m del borde inferior no están apoyados, hallar la tensión cortante media sobre las secciones *a-a* y *b-b* si la envuelta es de hormigón, de 20 cm de espesor y 6,5 m de altura. *Sol.* $\tau = 3{,}5$ kg/cm²

19. Un tubo de cobre de 5 cm de diámetro exterior y espesor de pared 6,5 mm ajusta sobre una barra circular de acero de 36 mm de diámetro. Los dos elementos están unidos entre sí por dos pasadores de metal de 8 mm de diámetro que les atraviesan, un pasador junto a cada extremo del conjunto. A la temperatura ambiente, el conjunto está libre de tensiones cuando se colocan los pasadores. La temperatura se eleva 40° C. Calcular las tensiones cortantes medias en los pasadores. Para el cobre $E = 9{,}1 \times 10^5$ kg/cm², $\alpha = 17{,}7 \times 10^{-6}$/°C; para el acero $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C. *Sol.* $\tau = 1.330$ kg/cm²



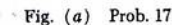


Fig. (*a*) Prob. 17

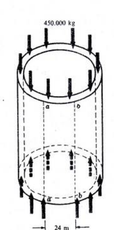
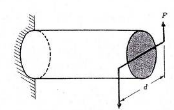


Fig. (*b*) Prob. 18

CAPITULO 5

Torsión

DEFINICION DE TORSION. Consideremos una barra sujeta rígidamente en un extremo y sometida en el otro a un par $T(=Fd)$ aplicado en un plano perpendicular al eje, como se ve en la figura. Se dice que esa barra está sometida a torsión.



EFECTOS DE LA TORSION. Los efectos de la aplicación de una carga de torsión a una barra son: (1) producir un desplazamiento angular de la sección de un extremo respecto al otro y (2) originar tensiones cortantes en cualquier sección de la barra perpendicular a su eje.

MOMENTO TORSOR. A veces, a lo largo de un eje actúan una serie de pares. En este caso, es conveniente introducir un nuevo concepto, el *momento torsor*, que se define para cada sección de la barra, como la suma algebraica de los momentos de los pares aplicados, situados a un lado de la sección considerada. Naturalmente, la elección de lado es arbitraria en cada caso.

MOMENTO POLAR DE INERCIA. Para un árbol circular hueco de diámetro exterior D_e con un agujero circular concéntrico de diámetro D_i, el momento polar de inercia de la sección representado generalmente por I_p está dado por

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_e^4 - D_i^4)$$

El momento polar de inercia de un árbol macizo se obtiene haciendo $D_i = 0$. Véase Problema 1.

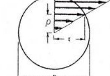
Este número I_p es simplemente una característica geométrica de la sección. No tiene significado físico, pero aparece en el estudio de las tensiones que se producen en un eje circular sometido a torsión.

A veces es conveniente escribir la ecuación anterior en la forma

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_e^2 + D_i^2)(D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{32}(D_e^2 + D_i^2)(D_e + D_i)(D_e - D_i)$$

Esta última forma es útil para calcular el valor de I_p en los casos en los que la diferencia $(D_e - D_i)$ es pequeña. Véase el Problema 9.

TENSION CORTANTE DE TORSION. Para un árbol circular, hueco o macizo, sometido a un momento de torsión T, la tensión cortante de torsión τ a una distancia ρ del centro del eje está dada por

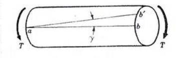


$$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$$

La deducción de esta ecuación se verá en detalle en el Problema 2. Para aplicaciones, véanse los Problemas 5, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 18. Esta distribución de tensiones varía desde cero en el centro del árbol (si es macizo) hasta un máximo en las fibras exteriores, como se ve en la figura anterior. Aquí estudiaremos solo la torsión de árboles macizos o huecos de sección circular.

HIPOTESIS. Para deducir la fórmula $\tau = T\rho/I_p$ se supone que una sección del árbol normal a su eje, plana antes de la carga, permanece plana después de aplicar el par y que un diámetro de la sección antes de la deformación sigue siendo un diámetro, o recta, de la sección después de la deformación. A causa de la simetría polar de un árbol circular, estas hipótesis parecen razonables; pero si la sección no es circular, ya no son ciertas; se sabe, por experiencias, que en este último caso, durante la aplicación de cargas exteriores, las secciones se alabean.

DEFORMACION POR CORTANTE. Si se marca una generatriz a-b en la superficie de la barra sin carga, y luego se aplica el momento torsor T, esta recta se traslada a a-b', como se ve en la figura. El ángulo γ, medido en radianes, entre las posiciones inicial y final de la generatriz, se define como la deformación por cortante en la superficie de la barra. La misma definición sirve para cualquier punto interior de la misma.



MODULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE. La relación entre la tensión cortante τ y su deformación γ se llama módulo de elasticidad en cortante y, como en el Capítulo 4, está dado por

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Como allí, las unidades de G son las mismas que las de la tensión cortante, pues la deformación no tiene dimensión.

ANGULO DE TORSION. Si un árbol de longitud L está sometido a un momento de torsión constante T en toda su longitud, el ángulo θ que un extremo de la barra gira respecto del otro, es

$$\theta = \frac{TL}{GI_p}$$

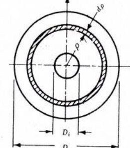
donde I_p representa el momento polar de inercia de la sección. Esta ecuación se deduce en el Problema 3. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 11-17.

MODULO DE ROTURA es la tensión cortante ficticia que se obtiene sustituyendo en la ecuación $\tau = T\rho/I_p$ el pár máximo T que soporta un árbol cuando se ensaya a rotura. En este caso, se toma para valor de ρ el radio exterior de la barra. Indudablemente, no está justificado el uso de esta fórmula en el punto de rotura, porque, como podrá verse en el Problema 2, se deduce solo para utilizarla dentro de la zona de comportamiento lineal del material. La tensión obtenida utilizando esta fórmula en este caso no es una verdadera tensión, pero a veces es útil para comparaciones.

PROBLEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS. Frecuentemente, se presenta este tipo de problemas en el caso de cargas de torsión. Un ejemplo es un árbol compuesto de dos materiales: un tubo de un material que rodea a otro tubo o a una barra maciza de material distinto, estando sometido el conjunto a un momento torsor. Como siempre, las ecuaciones de la estática aplicables han de ser suplementadas con otras basadas en las deformaciones de la estructura, para tener igual número de ellas que de incógnitas. En este caso, las incógnitas serían los momentos torsores que soporta cada material. La ecuación basada en las deformaciones establecería que los ángulos de giro de los distintos materiales son iguales. (Véanse los Problemas 15-17.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir una expresión del momento polar de inercia de la sección de un árbol circular hueco. ¿En qué se convierte esta expresión en el caso particular de un eje circular macizo?



Sea D_e el diámetro exterior del árbol y D_i el interior. A causa de la simetría circular es preferible utilizar coordenadas polares, como en la figura.

Por definición, el momento polar de inercia está dado por la integral

$$I_p = \int_A \rho^2 \, da$$

donde A indica que hay que calcular la integral sobre toda la sección.

Para calcular esta integral es mejor elegir un elemento de superficie, da, tal que ρ sea constante en todos los puntos del mismo. Una elección apropiada es el anillo elemental de radio ρ y espesor radial $d\rho$. Se supone que el espesor $d\rho$ del anillo es pequeño comparado con ρ. El área del elemento anular está dada por $da = 2\pi\rho\,(d\rho)$, por lo que el momento polar de inercia es

$$J_p = \int_{1/2 D_i}^{1/2 D_\rho} \rho^2 \, (2\pi\rho) \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{1/2 D_i}^{1/2 D_\rho} = \frac{\pi}{32}(D_\rho^4 - D_i^4)$$

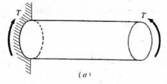
Las unidades son, evidentemente, (longitud)^4, esto es, cm^4. No es necesario intentar atribuir ningún significado físico a esta cantidad, I_p. Se verá que es útil en los problemas que tratan de la torsión de árboles.

Para el caso particular de un árbol circular macizo, la expresión anterior se convierte en

$$I_p = \frac{\pi}{32} D^4$$

donde D representa el diámetro del árbol.

2. Deducir una expresión de la relación entre el momento torsor aplicado a un árbol de sección circular y la tensión cortante en un punto cualquiera del mismo.

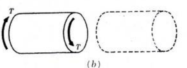


(a)

En la figura se ha representado el árbol cargado por dos pares T y, por consiguiente, en equilibrio estático. Para determinar la distribución de tensiones cortantes, cortemos el árbol por un plano perpendicular a su eje geométrico, y supongamos que este

plano no está «demasiado cerca» de ningún extremo, donde están aplicados los esfuerzos T. El empleo de ese plano está de acuerdo con el método usado normalmente en resistencia de materiales, que consiste en cortar el cuerpo de modo que las fuerzas a estudiar resulten exteriores al nuevo que se forma. Estas fuerzas (o tensiones) eran, naturalmente, efectos internos respecto al cuerpo original, no cortado

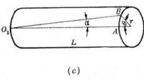
El esquema de cuerpo en libertad de la parte del árbol situada a la izquierda del plano aparece como se muestra en la figura adjunta. Indudablemente, debe actuar un par T sobre la sección cortada por el plano ya que por estar todo el árbol en equilibrio debe estarlo cualquier parte de él. El par T que actúa en la sección del corte representa el efecto de la parte derecha del árbol sobre la izquierda, pues al suprimir dicha parte derecha hay que sustituirla por su efecto sobre el resto. Este par es, indudablemente, la resultante de las tensiones cortantes repartidas en la sección. Ahora es necesario hacer ciertas hipótesis para determinar su distribución.



(b)

Una hipótesis fundamental es que una sección plana del árbol normal a su eje antes de aplicar las cargas sigue siendo plana y normal al eje después de aplicarlas. Para los árboles circulares puede comprobarse experimentalmente, pero no es válida para las secciones no circulares.

Una generatriz de la superficie del árbol, como la O_1A de la figura que se acompaña, se deforma hasta tomar la configuración O_1B cuando se produce la torsión. El ángulo entre las dos posiciones se representa por α. Por definición, la deformación unitaria por cortante γ en la superficie del árbol es



(c)

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

estando medido el ángulo α en radianes. Por geometría, de la figura se deduce que

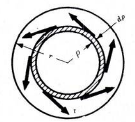
$$\alpha = \frac{AB}{L} = \frac{r\theta}{L}; \quad \text{de donde} \quad \gamma = \frac{r\theta}{L}$$

Y como se supone que un diámetro del árbol antes de aplicar la carga sigue siendo un diámetro cuando se produce la torsión, la deformación unitaria de torsión a una distancia ρ del centro del árbol será

$$\gamma_\rho = \frac{\rho\theta}{L}$$

Por consiguiente, las deformaciones por cortante de las fibras longitudinales varían linealmente con las distancias al centro del árbol.

Si suponemos que consideramos solamente la zona de comportamiento lineal del material en que la tensión cortante es proporcional a la deformación, es evidente que las tensiones cortantes de las fibras longitudinales varían linealmente con las distancias al eje del árbol. Indudablemente, esta distribución es simétrica respecto a ese eje. El aspecto es el que aparece en la figura adjunta. Para que haya equilibrio, la suma de los momentos de esas fuerzas cortantes repartidas sobre toda la sección circular es igual al momento torsor aplicado. También, la suma de los momentos de esas fuerzas es igual al par T representado en la Figura (b).



(d)

Así, pues, tenemos $\quad T = \int_0^r \tau\rho \, da$

donde $d\alpha$ representa la superficie del elemento anular rayado en la Fig. (*d*); pero las tensiones cortantes varían con las distancias al eje geométrico, por lo que

$$(\tau)_\rho/\rho = (\tau)_r/r = \text{constante}$$

donde los subíndices de las tensiones cortantes indican las distancias desde el eje del árbol. Por consiguiente, podemos escribir

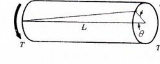
$$T = \int_0^r \frac{(\tau)_\rho}{\rho}(\rho^2)\,d\alpha = \frac{(\tau)_\rho}{\rho}\int_0^r \rho^2\,d\alpha$$

por ser constante la relación $\frac{(\tau)_\rho}{\rho}$. Pero la expresión $\int_0^r \rho^2\,d\alpha$ es, por definición (véase el Problema 1), el momento polar de inercia de la sección. En el Problema 1 se dedujeron sus valores para árboles circulares huecos y macizos, por lo que la relación buscada es

$$T = \frac{(\tau)_\rho I_\rho}{\rho}, \qquad \text{de donde} \qquad (\tau)_\rho = \frac{T\rho}{I_\rho}$$

3. Deducir una expresión para el ángulo de torsión de un árbol circular, en función del momento torsor aplicado.

Sea L la longitud del árbol, I_p el momento polar de inercia de la sección, T el momento torsor aplicado (supuesto constante en toda la longitud de la barra) y G el módulo de elasticidad en cortante. En el esquema adjunto se representa el ángulo de torsión en una longitud L por θ.



Por el Problema 2 tenemos que en las fibras extremas en las que $\rho = r$:

$$\gamma_r = \frac{r\theta}{L} \qquad \text{y} \qquad (\tau)_r = \frac{Tr}{I_p}$$

Por definición, el módulo a cortante está dado por $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Tr/I_p}{r\theta/L} = \frac{TL}{I_p\theta}$, de donde $\theta = \frac{TL}{GI_p}$.

Obsérvese que θ está expresado en radianes, esto es, no tiene dimensión. Podríamos tomar un sistema homogéneo de unidades, expresando T en kg-cm, L en cm, G en kg/cm² e I_p en cm⁴.

A veces es útil considerar el ángulo de torsión por unidad de longitud. Se suele representar por ϕ y está dado por

$$\phi = \frac{\theta}{L} = \frac{T}{GI_p}$$

4. Deducir una relación entre el momento torsor que actúa sobre un árbol que gira, la potencia transmitida por él y su velocidad angular, que se supone constante.

Representemos el momento torsor que actúa en el árbol por T, la velocidad angular en rpm por n y la potencia por CV, y consideremos un intervalo de tiempo de un minuto. Durante este intervalo, el momento torsor ejecuta una cantidad de trabajo, dada por el producto del momento por el desplazamiento angular en radianes, o sea, $T \times 2\pi n$. Si T está medido en kg-cm, el trabajo tiene esas mismas unidades. Por definición, si se realiza el trabajo a razón de 7.500 kg-cm por segundo = 60(7.500) = 450.000 kg-cm/min, es equivalente a un caballo de vapor. Por tanto, la potencia transmitida por el árbol es

$$\text{CV} = \frac{T \times 2\pi n}{450.000}, \qquad \text{de donde} \qquad T = \frac{71.600 \times \text{CV}}{n}$$

donde n está expresado en rpm y T en kg-cm.

5. Si se aplica un momento torsor de 10.000 kg-cm sobre un árbol de 45 mm de diámetro, ¿cuál es la tensión cortante máxima producida? ¿Cuál es el ángulo de giro en una longitud de árbol de 1,20 m? El material es acero, para el cual $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².

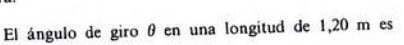
Por el Problema 1, sabemos que el momento polar de la sección es

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_e)^4 = \frac{\pi}{32}(4{,}5)^4 = 40.2 \text{ cm}^4$$

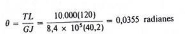
En el Problema 2 se vio que la tensión cortante por torsión τ a la distancia ρ del centro del árbol era: $(\tau)_\rho = T\rho/I_p$. La tensión cortante máxima se produce en las fibras exteriores, y como en ellas $\rho = 2{,}25$ cm, tenemos

$$(\tau)_{max} = \frac{10.000(2{,}25)}{40{,}2} = 560 \text{ kg/cm}^2$$

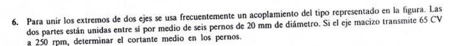
Por tanto, la tensión cortante varía linealmente desde cero en el centro del árbol a 560 kg/cm² en las fibras extremas, como se muestra en la figura.



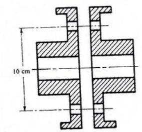
El ángulo de giro θ en una longitud de 1,20 m es

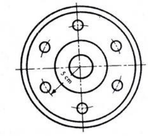


$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{10.000(120)}{8{,}4 \times 10^5(40{,}2)} = 0{,}0355 \text{ radianes}$$



6. Para unir los extremos de dos ejes se usa frecuentemente un acoplamiento del tipo representado en la figura. Las dos partes están unidas entre sí por medio de seis pernos de 20 mm de diámetro. Si el eje macizo transmite 65 CV a 250 rpm, determinar el cortante medio en los pernos.





El par transmitido es $T = \frac{71.600 \times CV}{n} = \frac{71.600(65)}{250} = 18.600$ kg-cm. La fuerza tangencial que actúa a 5 cm del centro del árbol para dar origen a este par es de 18.600/5 = 3.720 kg.

Por tanto, la tensión cortante media en cada perno es $\tau = \frac{3.720}{6 \times \frac{\pi}{4}(2)^2} = 197$ kg/cm². Se ha supuesto que el radio de los pernos es pequeño comparado con el del círculo en que están situados.

Obsérvese que esta tensión cortante media es la que aparecía en el Capítulo 4 y que en este problema no interviene la tensión cortante torsional.

7. Considerar un árbol circular macizo y otro hueco cuyo diámetro interior es los 3/4 del exterior. Comparar los pesos de igual longitud de estos árboles, necesarios para transmitir una carga torsional dada, si son iguales las tensiones cortantes producidas en ambos.

Para el árbol macizo, de diámetro d, la tensión cortante está dada por $(\tau)_\rho = T\rho/I_p$.
El valor máximo de esa tensión se produce en las fibras extremas, en las que $\rho = d/2$. Por tanto,

$$(\tau)_{max} = \frac{T(d/2)}{(\pi/32)d^4} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{o} \quad \frac{T}{(\tau)_{max}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Para el árbol hueco de diámetro D la tensión cortante máxima tiene lugar también en las fibras extremas donde $\rho = D/2$, por lo que

$$(\tau)_{max} = \frac{T(D/2)}{\frac{\pi}{32}\{D^4 - (\frac{3}{4}D)^4\}} = \frac{16T}{\pi(0{,}684)D^3} \quad \text{o} \quad \frac{T}{(\tau)_{max}} = \frac{\pi(0{,}684)D^3}{16}$$

Pero la relación $T/(\tau)_{max}$ es constante para los dos árboles, por lo cual $0{,}684D^3 = d^3$, de donde $D = 1{,}135d$.

$$\text{Relación de pesos} = \frac{D^2 - (3D/4)^2}{d^2} = \frac{0{,}4375D^2}{d^2} = \frac{0{,}4375(1{,}135d)^2}{d^2} = 0{,}563.$$

Así, pues, el árbol hueco pesa solo el 56,3 % del peso del macizo, lo que demuestra la ventaja de un árbol hueco sobre uno macizo.

8. Un árbol hueco de acero de 3 m de longitud debe transmitir un par de 250.000 kg-cm. El ángulo de torsión en esta longitud no debe exceder de 2,5° y la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm². Determinar los diámetros exterior e interior del árbol si $G = 8{,}5 \times 10^5$ kg/cm².

Sean d_e y d_i los diámetros exterior e interior del árbol, respectivamente. Por el Problema 3, sabemos que el ángulo θ está dado por $\theta = TL/GI_p$, estando θ expresado en radianes. Por consiguiente, en los 3 m de longitud tenemos

$$2{,}5 \text{ grados} \times \frac{1 \text{ rad}}{57{,}3 \text{ grad}} = \frac{250.000(300)}{8{,}5 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)}, \quad \text{de donde} \quad d_e^4 - d_i^4 = 20.600$$

La tensión cortante máxima tiene lugar en las fibras exteriores para las cuales $\rho = d_e/2$. Por tanto,

$$(\tau)_{max} = \frac{T(d_e/2)}{\frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)}, \quad 850 = \frac{250.000(d_e/2)}{\frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{y} \quad d_e^4 - d_i^4 = 1.498d_e$$

Así, pues, $1.498d_e = 20.600$ y $d_e = 13{,}75$ cm. Sustituyendo, $d_i = 11{,}1$ cm.

9. Considerar un tubo de pared delgada sometido a torsión. Deducir una expresión aproximada del momento torsor admisible si el esfuerzo de trabajo en cortante es una constante dada τ_w. Deducir también una expresión aproximada para la relación resistencia-peso de ese tubo. Se supone que el tubo no pandea.

El momento polar de inercia de un árbol circular hueco de diámetro exterior D_e e interior D_i es $I_p = \frac{\pi}{32}(D_e^4 - D_i^4)$. Si R representa el radio exterior del tubo, $D_e = 2R$, y si t es el espesor, $D_i = 2R - 2t$.

El momento polar de inercia I_p puede escribirse también en la forma

$$I_p = \frac{\pi}{32}\{(2R)^4 - (2R - 2t)^4\} = \frac{\pi}{2}\{R^4 - (R - t)^4\} = \frac{\pi}{2}\{4R^3t - 6R^2t^2 + 4Rt^3 - t^4\}$$
$$= \frac{\pi}{2}R^4\{4(t/R) - 6(t/R)^2 + 4(t/R)^3 - (t/R)^4\}$$

Despreciando los cuadrados y las potencias superiores de la relación t/R, pues estamos considerando un tubo de pared delgada, esta expresión se convierte en el valor aproximado

$$I_p = 2\pi R^3 t$$

La fórmula ordinaria de la torsión es $T = \tau_w I_p / R$. Para un tubo de pared delgada, esta expresión nos lleva para el momento torsor admisible a

$$T = 2\pi R^2 t \tau_w$$

El peso W del tubo es $W = \gamma LA$, siendo γ el peso específico del material, L la longitud del tubo y A la sección del mismo. La sección está dada por

$$A = \pi\{R^2 - (R - t)^2\} = \pi\{2Rt - t^2\} = \pi R^2\{2t/R - (t/R)^2\}$$

Despreciando nuevamente el cuadrado de la relación t/R por tratarse de un tubo delgado, esta expresión se transforma en

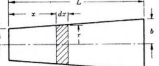
$$A = 2\pi Rt$$

La relación resistencia-peso está definida por T/W, que viene dada por

$$\frac{T}{W} = \frac{2\pi R^2 t \tau_w}{2\pi R t L\gamma} = \frac{R\tau_w}{L\gamma}$$

Esta relación es de importancia considerable para el diseño de aeronaves.

10. Un árbol circular macizo tiene una ligera variación de grueso, uniforme desde un extremo al otro. Llamando a al radio del extremo pequeño, y b al del grande, determinar el error cometido si se calcula el ángulo de torsión para una longitud dada tomando el radio medio del árbol. El radio en el extremo más ancho es 1,2 veces el del más estrecho.



Tomemos un sistema de ejes coordenados tal que la variable x represente la distancia al extremo menor: el radio de una sección a la distancia x de dicho extremo es

$$r = a + \frac{(b - a)x}{L}$$

siendo L la longitud de la barra.

Como el ángulo de variación de sección es pequeño, es suficiente considerar el ángulo $d\theta$ que gira el elemento sombreado de longitud dx, que se obtiene aplicando la expresión $\theta = TL/GI_p$ al elemento de longitud dx y radio $r = a + \frac{(b-a)x}{L}$. Para ese elemento, el momento polar de inercia es $I_p = \frac{\pi}{32}D^4 = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{2}[a + \frac{(b-a)x}{L}]^4$.

Así, pues,

$$d\theta = \frac{T\,dx}{G\frac{\pi}{2}[a + \frac{(b-a)x}{L}]^4}$$

El ángulo de torsión en la longitud L se halla integrando esta ecuación, por lo que

$$\theta = \frac{2T}{G\pi}\int_0^L \frac{dx}{[a + \frac{(b-a)x}{L}]^4} = \frac{2T}{G\pi}(-\frac{1}{3})(\frac{L}{b-a})\left[\frac{1}{[a + \frac{(b-a)x}{L}]^3}\right]_0^L = \frac{2TL}{3G\pi(b-a)}(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3})$$

Si $b = 1{,}2a$, esta expresión es $\theta = \frac{1{,}40433TL}{G\pi a^4}$.

Para un árbol macizo de radio uniforme $1{,}1a$, $\theta_1 = \dfrac{TL}{G\frac{\pi}{2}(1{,}1a)^4} = \dfrac{1{,}36602TL}{G\pi a^4}$.

Tanto por ciento de error $= \dfrac{0{,}03831}{1{,}40433} \times 100 = 2{,}73\ \%$.

11. Un árbol circular macizo tiene un diámetro uniforme de 5 cm y una longitud de 3 m. En su punto medio se le transmiten 65 CV por medio de una correa que pasa por una polea. Esta potencia se usa para mover dos máquinas, una en el extremo izquierdo del árbol que consume 25 CV y otra en el derecho, que consume los 40 CV restantes. Determinar la tensión cortante máxima en el árbol y el ángulo de torsión relativo entre sus dos extremos. La velocidad de giro es de 200 rpm y el material es acero para el cual $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².

En la mitad izquierda del árbol tenemos 25 CV, que corresponden a un par T_1 dado por

$$T_1 = \frac{71.600 \times \text{CV}}{n} = \frac{71.600(600(25)}{200} = 8.950 \text{ kg-cm}$$

Del mismo modo, en el lado derecho tenemos 40 CV, correspondientes a un par T_2 dado por

$$T_2 = \frac{71.600(40)}{200} = 14.320 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la tensión cortante máxima tiene lugar en las fibras exteriores de la mitad derecha y viene dada por la fórmula ordinaria de la torsión

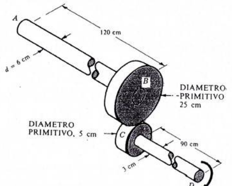
$$(\tau)_\rho = \frac{T\rho}{I_p} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{14.320(2{,}5)}{\frac{\pi}{32}(5)^4} = 583 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo de torsión del extremo izquierdo con relación al centro es $\theta_1 = \dfrac{8.950(150)}{8{,}4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(5)^4} = 0{,}0260$ rad.

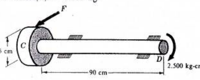
El ángulo de torsión del extremo derecho con relación al centro es $\theta_2 = \dfrac{14.320(150)}{8{,}4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(5)^4} = 0{,}0417$ rad, en la misma dirección que θ_1.

El ángulo de torsión relativo entre los dos extremos del árbol es $\theta = \theta_2 - \theta_1 = 0{,}0417 - 0{,}0260 = 0{,}0157$ radianes.

12. Considerar los dos árboles macizos circulares conectados por las ruedas dentadas de diámetros 5 cm y 25 cm. Se supone que los árboles están soportados en sus apoyos de modo que no sufren flexión. Hallar el giro del extremo derecho D de uno de los árboles, con respecto al extremo izquierdo A del otro, producido por el par de 2.500 kg-cm aplicado en D. El árbol de la izquierda es de acero, para el cual $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm² y el de la derecha bronce con $G = 3{,}5 \times 10^5$ kg/cm².

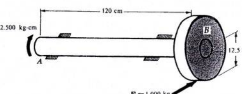


Un esquema de cuerpo en libertad del árbol derecho revela que debe actuar sobre la rueda dentada pequeña una fuerza tangencial F, como se indica en la figura. Para que haya equilibrio $F = 2.500/2{,}5 = 1.000$ kg.



El ángulo de torsión del árbol derecho está dado por $\theta_1 = \frac{TL}{GI_p} = \frac{2.500(90)}{3,5 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(3)^4} = 0,0808$ rad.

En la figura adjunta se muestra un esquema de cuerpo en libertad del árbol izquierdo. La fuerza F es igual y opuesta a la que actúa en la rueda dentada pequeña C. Está aplicada a 12,5 cm del eje del árbol AB, por lo que le transmite un par de 12,5(1.000) = 12.500 kg-cm. A causa de este par hay un giro del extremo B con respecto al A dado por el ángulo θ_2, donde



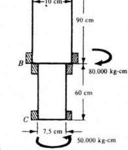
$$\theta_2 = \frac{12.500(120)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4} = 0,0140 \text{ rad.}$$

Es importante observar que este ángulo de giro θ_2 induce un giro de *cuerpo rígido* de todo el árbol CD por causa de las ruedas dentadas. El giro de CD estará en la misma relación respecto al de AB que los diámetros, o sea, 25 : 5 o 5 : 1. Por tanto, en el árbol CD se produce un giro de 5(0,0140) rad. Sobre este giro como cuerpo rígido de CD se superpone el desplazamiento angular de D respecto a C representado antes por θ_1.

Por tanto, el ángulo de torsión resultante de D respecto a A es $\theta = 5(0,0140) + 0,0808 = 0,151$ rad.

13. El árbol compuesto representado es de acero para el cual $G = 8,4 \times 10^5$ kg/cm². Se despreciará la concentración de tensiones producida por el cambio brusco de sección.

En el extremo inferior, el árbol está sometido a un par de 50.000 kg-cm en el sentido indicado, y en la unión a otro par de 80.000 kg-cm en sentido opuesto al primero. Determinar la tensión cortante máxima en cada parte del árbol y los ángulos de torsión en B y en C.



El par que actúa en la zona BC es, indudablemente, de 50.000 kg-cm. En la parte AB es de 50.000 − 80.000 = −30.000 kg-cm, esto es, de dirección opuesta al de BC.

La tensión cortante en cada zona está dada por la fórmula $(\tau)_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$, por lo que en las fibras extremas de cada uno de esos árboles tenemos

$$(\tau)_{AB} = \frac{30.000(5)}{\frac{\pi}{32}(10)^4} = 155 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad (\tau)_{BC} = \frac{50.000(3,75)}{\frac{\pi}{32}(7,5)^4} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo de torsión en B es $\theta_1 = \frac{30.000(90)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(10)^4} = 0,00327$ radianes (en sentido de las agujas del reloj mirando hacia abajo). Este es el valor verdadero o absoluto del ángulo de torsión en B.

Consideremos momentáneamente que la unión B está fija en el espacio en su posición no deformada y calculemos el ángulo de giro de la sección C con respecto a B. Este ángulo está dado por

$$\theta_2 = \frac{50.000(60)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(7,5)^4} = 0,01150 \text{ radianes (sentido contrario a las agujas del reloj)}$$

Sin embargo, éste no es el verdadero ángulo de giro en C, porque la sección B no está fija en el espacio, sino que gira 0,00327 radianes en sentido opuesto, por lo que el verdadero ángulo de giro de C con respecto a su posición original no deformada es de

$$\theta_3' = 0.01150 - 0.00327 = 0.00823 \text{ radianes (sentido de las agujas del reloj)}$$

14. Un árbol compuesto consta de una varilla de bronce de 60 cm de longitud unida fuertemente a una barra de aluminio de 60 cm. Cada una de ellas tiene 6 cm de diámetro. El límite de proporcionalidad del bronce en cortante es 1.050 kg/cm² y el de la aleación de aluminio 1.550 kg/cm², debiéndose aplicar un coeficiente de seguridad 2 en cada caso. Si el ángulo de torsión en el extremo derecho no debe exceder de 1°, ¿cuál es el máximo momento torsor que puede soportar el árbol? Se supone que está sujeto rígidamente en su extremo superior. Para el bronce, $G = 3{,}5 \times 10^5$ kg/cm² y para el aluminio $G = 2{,}8 \times 10^5$ kg/cm².

Quizá el método más sencillo para resolver el problema es determinar tres valores del momento torsor. El primero es el par suficiente para producir la tensión de trabajo a cortante en el bronce; el segundo par produce la tensión de trabajo a cortante en el aluminio, y el tercero crea una torsión de 1° en todo el árbol. El par admisible es el mínimo de estos tres valores.

Los pares primero y segundo, T_1 y T_2, se hallan por la fórmula de la torsión:

$$\frac{1.050}{2} = \frac{T_1(3)}{\frac{\pi}{32}(6)^4} \qquad \text{y} \qquad \frac{1.550}{2} = \frac{T_2(3)}{\frac{\pi}{32}(6)^4}$$

de donde $\quad T_1 = 22.300$ kg-cm $\quad$ y $\quad T_2 = 32.900$ kg-cm

El tercer par, T_3, da origen a un ángulo de torsión de 1° de todo el árbol. Puede hallarse por la fórmula ordinaria de la deformación torsional:

$$1° \times \frac{1 \text{ rad}}{57{,}3°} = \frac{T(60)}{3{,}5 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4} + \frac{T_3(60)}{2{,}8 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4}, \qquad \text{de donde} \qquad T_3 = 5.760 \text{ kg-cm}$$

Como T_3 es el mínimo de estos tres valores, el ángulo de torsión es el factor determinante en el diseño, y el par máximo que puede aplicarse es de 5.760 kg-cm.

15. Determinar los pares reactivos en los extremos fijos de un árbol circular cargado por los pares representados en la Fig. (a). La sección de la barra es constante en toda la longitud.

Supongamos que los pares reactivos T_I y T_D son positivos en el sentido en la Fig. (b). Por la estática, tenemos

$$(1) \quad T_I - T_1 + T_2 - T_D = 0$$

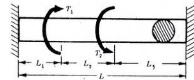



Fig. (a)

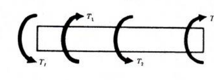
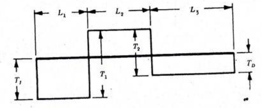


Fig. (b)

Es la única ecuación del equilibrio estático, y contiene dos incógnitas, por lo que el problema es estáticamente indeterminado y es necesario suplementarla con otra basada en la deformación del sistema.

La variación del par con la longitud a lo largo de la barra puede representarse como el gráfico siguiente:



En la Fig. (*a*) aparece el esquema de cuerpo en libertad de la parte izquierda, de longitud L_1.

Yendo de izquierda a derecha a lo largo del árbol, el momento torsor en la zona central de longitud L_2 está dado por la suma algebraica de los pares que existen a la izquierda de esa sección, es decir, $(T_1 - T_I)$. En la Fig. (*b*) figura el esquema de cuerpo en libertad de esta zona.

Finalmente, en la Fig. (*c*) aparece el diagrama de cuerpo en libertad de la parte derecha, de longitud L_3.

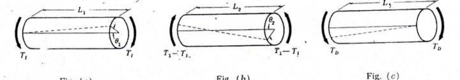


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

Sea θ_1 el ángulo de torsión del punto de aplicación en T_1 y θ_2 el ángulo en T_2. Considerando las zonas de longitudes L_1 y L_3, tenemos inmediatamente

$$(2)\quad \theta_1 = \frac{T_I L_1}{GI_p} \qquad y \qquad (3)\quad \theta_2 = \frac{T_D L_3}{GI_p}$$

En cada uno de los esquemas anteriores se representa la situación original de una generatriz de la superficie del árbol por una línea llena y la posición deformada por líneas de trazos. La observación de la zona central de longitud L_2 revela que el ángulo de torsión de su extremo derecho respecto al izquierdo es $(\theta_1 + \theta_2)$, por lo que como el par que origina esta deformación es $(T_1 - T_I)$, tenemos

$$(4)\quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{(T_1 - T_I)L_2}{GI_p}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*1*) a (*4*), hallamos

$$T_I = T_1\left(\frac{L_2 + L_3}{L}\right) - T_2\left(\frac{L_3}{L}\right) \qquad y \qquad T_D = -T_1\left(\frac{L_1}{L}\right) + T_2\left(\frac{L_1 + L_2}{L}\right)$$

Es interesante observar el comportamiento de una generatriz de la superficie del árbol. Al principio era, naturalmente, recta en toda su longitud L, pero después de la aplicación de T_1 y T_2 tiene el aspecto de la línea quebrada de la figura adjunta.

Sin giro

16. Considerar un árbol compuesto fabricado con uno macizo de 5 cm de diámetro de aleación de aluminio con $G = 2{,}8 \times 10^5$ kg/cm², rodeado de otro de acero, circular, hueco, de diámetro exterior 6,5 cm e interior 5 cm, con $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm². Los dos metales están rígidamente unidos entre sí. Si el árbol compuesto está cargado con un momento torsor de 14.000 kg-cm, calcular la tensión cortante en las fibras extremas del acero y en las del aluminio.

Sean T_1 = par soportado por el aluminio, y T_2 = par soportado por el acero. Por el equilibrio estático de los momentos respecto al eje geométrico, tenemos

$$T_1 + T_2 = T = 14.000$$

donde T = momento torsor exterior aplicado. Es la única ecuación que podemos obtener por la estática y, como contiene dos incógnitas, T_1 y T_2, debemos suplementarla con otra que provenga de las deformaciones del árbol. La estructura es, pues, estáticamente indeterminada.

La ecuación necesaria se halla fácilmente, pues los dos materiales están rígidamente unidos, por lo que sus ángulos de torsión han de ser iguales. En una longitud L de árbol tenemos, utilizando la fórmula $\theta = TL/GI_p$,

$$\frac{T_1 L}{2{,}8 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(5)^4} = \frac{T_2 L}{8{,}4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}[(6{,}5)^4 - (5)^4]} \quad \text{o} \quad T_1 = 0{,}18 T_2$$

Esta ecuación, junto con la de la estática, forma un sistema que resuelto da:

T_1 = 2.140 kg-cm (soportado por el aluminio) y T_2 = 11.860 kg-cm (soportado por el acero)

La tensión cortante en las fibras extremas del tubo de acero es $(\tau)_2 = \dfrac{11.860(3{,}25)}{\frac{\pi}{32}[(6{,}5)^4 - (5)^4]} = 340$ kg/cm².

La tensión cortante en las fibras extremas del aluminio es $(\tau)_1 = \dfrac{2.140(2{,}5)}{\frac{\pi}{32}(5)^4} = 90$ kg/cm².

17. Un árbol circular macizo de acero está rodeado por una envuelta delgada de cobre unida rígidamente a él. El conjunto está sometido a un momento torsor. Si el cobre soporta 1,5 veces el par que soporta el acero, hallar la relación entre los diámetros exterior e interior del tubo de cobre. Para el cobre, $G = 4{,}2 \times 10^5$ kg/cm², y para el acero, $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².

Como los dos metales están rígidamente unidos, los ángulos de torsión de ambos son iguales. Dichos ángulos están dados por $\theta = TL/GI_p$, por lo que si T es el par soportado por el acero, tenemos

$$\frac{TL}{8{,}4 \times 10^5 \frac{\pi}{32} d_i^4} = \frac{(1{,}5T)L}{4{,}2 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(d_e^4 - d_i^4)}, \quad \text{de donde} \quad \frac{d_e}{d_i} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

donde d_e y d_i son los diámetros exterior e interior del tubo de cobre.

18. Si la tensión cortante máxima admisible en el tubo de cobre del Problema 17 es 560 kg/cm² y en el acero 840 kg/cm², determinar el par máximo que puede soportar el árbol compuesto. El diámetro del árbol de acero es de 60 mm y, como en el Problema 17, el cobre soporta 1,5 veces el par del acero.

Probablemente el procedimiento más sencillo es determinar dos valores del par, uno basado en la hipótesis de que el cobre está sometido a su tensión máxima admisible y el otro suponiendo que en el acero hay un cortante de 840 kg/cm². No es de esperar que el mismo par produzca las tensiones críticas en cada uno de los materiales simultáneamente. El menor de estos dos pares es el valor límite que puede soportar el árbol compuesto.

Supongamos que se produce una tensión cortante de 560 kg/cm² en las fibras extremas del tubo de cobre. Este tubo tiene un diámetro exterior de $6\sqrt{2} = 8{,}48$ cm y un diámetro interior de 6 cm. Para hallar el par T_C que soporta, tenemos:

$$560 = \frac{T_C(8{,}48/2)}{\frac{\pi}{32}[(8{,}48)^4 - (6)^4]} \qquad \text{y} \qquad T_C = 50.250 \text{ kg-cm}$$

El par soportado por el acero es, en este caso, $T_a = \frac{50.250}{1{,}5} = 33.500$ kg-cm.

El par soportado por el árbol compuesto es la suma de estos pares, o sea, 83.750 kg-cm.

Supongamos, ahora, que en las fibras exteriores del acero se produce una tensión cortante de 840 kg/cm². El par que soporta en este caso es:

$$840 = \frac{T_a'(6/2)}{\frac{\pi}{32}(6)^4} \qquad \text{y} \qquad T_a' = 35.600 \text{ kg-cm}$$

y el que soporta el cobre es $T_C' = 1{,}5(35.600) = 53.400$ kg-cm. El par total que soporta el árbol compuesto de acuerdo con esta *hipótesis es, por consiguiente, 89.000 kg-cm.*

Así, pues, el que determina el par límite que puede soportar el conjunto es el primero de los valores, esto es, 83.750 kg-cm para el cual no se excede de ninguna de las tensiones de trabajo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

19. Si un árbol circular macizo de 30 mm de diámetro está sometido a un par T de 2.500 kg-cm que produce un ángulo de torsión de 3,38 grados en una longitud de 1,5 m, determinar el módulo cortante del material.
Sol. $G = 8 \times 10^5$ kg/cm²

20. Considerar un árbol circular hueco de diámetro exterior 12,5 cm e interior 7,5 cm. Por la experiencia se ha determinado que la tensión cortante en las fibras interiores es de 600 kg/cm². ¿Cuál es la tensión cortante en las exteriores? *Sol.* 1.000 kg/cm²

21. Determinar la tensión cortante máxima en un árbol macizo de 10 cm de diámetro que soporta un par de 228.000 kg-cm. ¿Cuál es el ángulo de torsión por unidad de longitud si el material es acero para el cual $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm²? *Sol.* 1.160 kg/cm², 0,000276 rad/cm

22. Determinar la potencia máxima que puede transmitir un árbol macizo de acero de 55 mm de diámetro a 250 rpm si la tensión de trabajo del acero es 750 kg/cm². *Sol.* 86 CV

23. Un árbol hueco de acero de 5,50 m de longitud tiene un diámetro exterior de 125 mm y uno interior de 6,25 mm y está conectado a una máquina que produce 250 CV a una velocidad de 150 rpm. Calcular la tensión cortante máxima en el árbol y la torsión en los 5,50 m de longitud. Tomar $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².
Sol. 330 kg/cm², 0,0348 rad

24. Un eje de hélice de barco tiene 35 cm de diámetro. La tensión de trabajo en cortante admisible es de 500 kg/cm² y el ángulo de torsión admisible de 1° en 15 diámetros de longitud. Si $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm², determinar el par máximo que puede transmitir el árbol. *Sol.* 4.114.000 kg-cm

25. Considerar el mismo árbol del Problema 24, pero con un agujero axial de 17,5 cm en toda su longitud. Las condiciones de tensión de trabajo y de ángulo de torsión siguen siendo las mismas. ¿En qué porcentaje se reduce la capacidad de soportar carga torsional? ¿En qué proporción se reduce el peso del árbol?
Sol. 6,25 %, 25 %

26. Comparar el par que pueden soportar dos árboles de la misma área de la sección, uno circular hueco cuyo espesor radial es de 30 mm y el otro circular macizo de 120 mm de diámetro. La tensión cortante máxima es igual para ambos. *Sol.* Relación de pares = 1,70

27. Un árbol hueco de acero debe transmitir 7.500 CV a 120 rpm. Si la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm² y la relación del diámetro exterior al interior es 2, determinar el diámetro exterior. Hallar, además, el ángulo de torsión en una longitud de 12 m. $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm². *Sol.* 30,6 cm, 4,55°

28. Determinar el diámetro de un árbol macizo de acero que ha de transmitir 200 CV a una velocidad de 250 rpm si la tensión cortante admisible es de 850 kg/cm². Determinar, asimismo, las dimensiones de un árbol hueco de acero cuyo diámetro interior es tres cuartos del exterior para las mismas condiciones. ¿Cuál es la relación entre los ángulos de torsión por unidad de longitud de esos dos árboles?
Sol. Diámetro = 7,00 cm, diámetro exterior = 7,95 cm, relación = 0,88

29. Considerar un árbol circular macizo que transmite 1.800 CV a 350 rpm. Determinar el diámetro necesario para que (*a*) no se torsione un ángulo superior a 1 grado en una longitud de 20 diámetros y (*b*) la tensión cortante no exceda de 650 kg/cm². El árbol es de acero para el cual $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm². *Sol.* 17,2 cm

30. Un árbol compuesto está constituido por uno macizo de cobre de 65 cm de longitud y 10 cm de diámetro, unido a otro de 80 cm de longitud de acero macizo con 11,5 cm de diámetro. A cada extremo del árbol se aplica un par de 120.000 kg-cm. Hallar la tensión cortante máxima en cada material y el ángulo de torsión de todo el árbol. Para el cobre, $G = 4{,}2 \times 10^5$ kg/cm², y para el acero, $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².
Sol. En el cobre, 610 kg/cm²; en el acero, 400 kg/cm²; $\theta = 0{,}0256$ rad

31. El árbol vertical y las poleas enclavadas a él pueden considerarse sin peso. El árbol gira con velocidad angular uniforme. Los esfuerzos conocidos en las poleas son los indicados y las tres poleas están sujetas rígidamente al árbol, como se puede ver en la Fig. (*a*). Si la tensión de trabajo a cortante es de 530 kg/cm², determinar el diámetro necesario para un árbol circular macizo. Despreciar la flexión del árbol producida por la proximidad de los apoyos de las poleas. *Sol.* 3,15 cm

32. Determinar el número de pernos necesarios para unir dos árboles de 60 mm de diámetro cada uno que soportan un par de 110.000 kg-cm. La tensión cortante admisible en los pernos es de 850 kg/cm², el diámetro del círculo de pernos de 180 mm y el diámetro de los mismos de 20 mm. *Sol.* 5 pernos

33. Considerar el árbol compuesto de acero representado en la Fig. (*b*) formado por dos barras macizas circulares. Se desprecia la concentración de tensiones en la unión de las dos. La tensión cortante máxima admisible es de 750 kg/cm² y el máximo ángulo de torsión admisible en los 150 cm de longitud, de 1 grado. ¿Cuál es la capacidad de resistencia a un par de este árbol? Para este material, $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm².
Sol. 51.500 kg-cm

34. Determinar los pares reactivos en los extremos empotrados del árbol circular cargado con tres pares, representado en la Fig. (*c*). La sección de la barra es constante en toda su longitud.
Sol. $T_I = 3.636$ kg-cm, $T_D = 13.636$ kg-cm

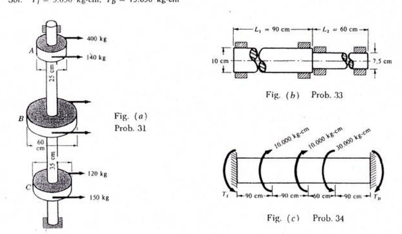


Fig. (*a*) Prob. 31

Fig. (*b*) Prob. 33

Fig. (*c*) Prob. 34

35. Se ha formado un árbol compuesto rodeando uno macizo de bronce de 60 mm de diámetro por un tubo de acero con espesor de pared 6 mm. Los metales están íntimamente unidos entre ellos. Determinar el aumento de capacidad para soportar pares del árbol compuesto sobre el de bronce solo. Para el bronce, $G = 3{,}5 \times 10^5$ kg/cm², y para el acero, $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm². La tensión de trabajo en cortante es de 500 kg/cm² para el bronce y 850 kg/cm² para el acero. *Sol.* 111 %

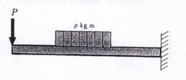
36. Considerar un árbol hueco de acero de diámetro interior 50 mm y exterior 75 mm rodeado por un tubo de aluminio de 6 mm de espesor de pared. Estos árboles compuestos se usan a veces en presencia de elementos corrosivos. Los dos metales están unidos entre sí rígidamente. Si se aplica al conjunto un momento torsor de 65.000 kg-cm, hallar la tensión cortante máxima en el acero y en el aluminio. Para el acero, $G = 8{,}4 \times 10^5$ kg/cm², y para el aluminio, $G = 2{,}8 \times 10^5$ kg/cm².
Sol. En el acero $\tau = 730$ kg/cm², en el aluminio $\tau = 280$ kg/cm²

CAPITULO 6

Esfuerzo cortante y momento flector

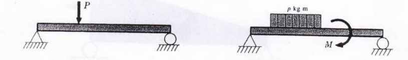
DEFINICION DE VIGA. Una barra sometida a fuerzas o pares situados en un plano que contiene a su eje longitudinal se llama viga. Se supone que las fuerzas actúan perpendicularmente a dicho eje longitudinal.

VIGAS EN VOLADIZO. Si la viga está sujeta solamente en un extremo, de tal manera que su eje no pueda girar en ese punto, se llama viga en voladizo. En la figura adjunta se representa este tipo de viga. El extremo izquierdo puede flectar libremente, mientras que el derecho está sujeto rígidamente. Generalmente, se dice que el extremo derecho está «empotrado». La reacción del muro de la derecha que soporta a la viga sobre ésta, consiste en una fuerza vertical junto con un par, que actúan en el plano de las cargas aplicadas.



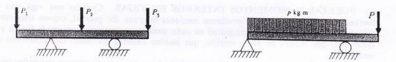
VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS. Una viga que está apoyada libremente en los dos extremos se llama viga simplemente apoyada. Este término implica que los apoyos extremos son capaces de ejercer sobre la barra solamente fuerzas y no momentos. Por tanto, no existe impedimento al giro de los extremos de la barra en los apoyos cuando flexa bajo las cargas. Más abajo se representan dos vigas simplemente apoyadas.

Debe observarse que al menos uno de los apoyos ha de ser capaz de sufrir un movimiento horizontal, de modo que no exista ninguna fuerza en la dirección del eje de la viga. Si ninguno de los dos extremos fuera capaz de moverse horizontalmente se produciría alguna fuerza axial en la viga cuando se deformara bajo la carga. En este libro no se considerarán problemas de esta naturaleza.



Se dice que la primera viga de la figura de encima está cargada con una fuerza aislada y la segunda está sometida a una carga uniformemente repartida y un par.

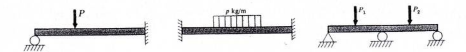
VIGAS CON VOLADIZOS. Una viga apoyada libremente en dos puntos y que tiene uno o los dos extremos que continúan más allá de esos puntos se llama viga con voladizos. A continuación aparecen dos ejemplos.



VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS. Todas las vigas consideradas antes, los voladizos, las simplemente apoyadas y las con voladizos extremos son tales, que se pueden determinar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones del equilibrio estático. Los valores de estas reacciones son independientes de las deformaciones de la viga. Se dice que son vigas estáticamente determinadas.

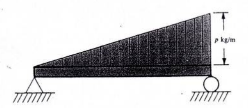
VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS. Si el número de reacciones que se ejercen sobre la viga excede del número de ecuaciones del equilibrio estático, hay que suplementar estas ecuaciones con otras basadas en las deformaciones de la viga. En este caso, se dice que ésta es estáticamente indeterminada.

Una viga en voladizo que está apoyada en el extremo, una viga empotrada rígidamente en los dos extremos y una viga que se extiende sobre tres o más apoyos son ejemplos de vigas indeterminadas. Tienen el aspecto de las figuras siguientes.



Este tipo de vigas se estudiará en el Capítulo 11.

TIPOS DE CARGAS. Las cargas comúnmente aplicadas a una viga pueden consistir en fuerzas aisladas (aplicadas en un punto), cargas uniformemente repartidas, en cuyo caso se expresa la magnitud por cierto número de kilogramos por metro de longitud de viga, o cargas variables uniformemente, como se muestra a continuación.



Una viga puede estar cargada también por un par aplicado a ella. La magnitud del par se suele expresar en kg-m o kg-cm.

En este libro solo se considerarán cargas aplicadas gradualmente. Las cargas dinámicas o de impacto, en una viga, requieren un estudio de un tipo considerablemente más difícil.

FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS EN VIGAS. Cuando una viga está cargada con fuerzas y pares, en la barra se producen tensiones internas. En general, existen tensiones normales y cortantes. Para determinar su magnitud en cada sección es necesario conocer la fuerza y el momento resultantes que actúan en dicha sección, que pueden hallarse aplicando las ecuaciones del equilibrio estático.

Esto se verá, quizá, más fácilmente considerando como ejemplo un caso particular de cargas, como el de la Fig. 1, en que sobre una viga simplemente apoyada actúan varias cargas aisladas.

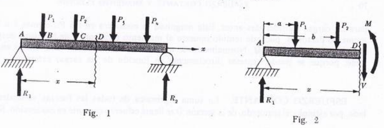


Fig. 1 Fig. 2

Se quiere estudiar las tensiones internas en la sección D, situada a la distancia x del extremo izquierdo de la viga. Para ello consideremos que se corta la viga en D y que se suprime la parte de la derecha de esta sección. Deberá sustituirse la parte suprimida por el efecto que ejercía sobre el trozo de la izquierda, efecto que consiste en una fuerza cortante vertical juntamente con un par, representados por los vectores T y M, respectivamente, en el esquema de cuerpo en libertad de la parte izquierda de la viga, que se representa en la Figura 2.

La fuerza T y el par M mantienen la parte izquierda de la barra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas R_1, P_1, P_2. Se toman T y M positivas si tienen el sentido indicado arriba.

MOMENTO RESISTENTE. El par M representado en la Fig. 2 se llama momento resistente en la sección D. La magnitud de M puede hallarse utilizando una ecuación de la estática que expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a un eje que pasa por D y es perpendicular al plano del papel, es cero. Así,

$$\Sigma M_0 = M - R_1 x + P_1(x - a) + P_2(x - b) = 0$$

o

$$M = R_1 x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

Por tanto, el momento resistente M es el producido en D por los momentos de la reacción en A y las fuerzas aplicadas P_1 y P_2. M es el par resultante debido a las tensiones repartidas en la sección vertical D. Estas tensiones actúan en dirección horizontal y son tracciones en ciertas zonas de la sección y compresiones en otras. En el Capítulo 8 se estudiará con detalle su naturaleza.

CORTANTE RESISTENTE. La fuerza vertical T representada en la Fig. 2 de más arriba se llama cortante resistente en la sección D. Para que exista equilibrio de fuerzas en la dirección vertical

$$\Sigma F_v = R_1 - P_1 - P_2 - T = 0$$

o

$$T = R_1 - P_1 - P_2$$

Esta fuerza T es en realidad la resultante de las tensiones cortantes repartidas en la sección vertical D. La naturaleza de éstas se estudiará en el Capítulo 8.

MOMENTO FLECTOR. La suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores situadas a un lado de la sección D, respecto a un eje que pasa por D, se llama momento flector en D. Esto se representa por

$$R_1 x - P_1(x - a) - P_2(x - b)$$

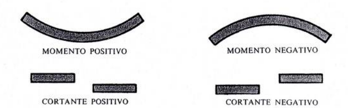
para las cargas consideradas antes. Esta magnitud se considera en los Problemas 1 a 15 inclusive. El momento flector es, pues, de sentido opuesto al momento resistente y de la misma magnitud. Se suele representar también por M. Normalmente se usa en los cálculos el momento flector en lugar del resistente, porque se puede expresar directamente en función de las cargas exteriores.

ESFUERZO CORTANTE. La suma algebraica de todas las fuerzas verticales situadas a un lado, por ejemplo, el izquierdo, de la sección D se llama esfuerzo cortante en esa sección. Se representa por

$$R_1 - P_1 - P_2$$

para las cargas anteriores. El esfuerzo cortante es de sentido opuesto y la misma magnitud que el cortante resistente. Generalmente se le representa por T. Se le suele usar en los cálculos en lugar del cortante resistente. Se considerará en los Problemas 1 a 15 inclusive.

CRITERIO DE SIGNOS. El criterio habitual de signos para el esfuerzo cortante y el momento flector aparece en los esquemas siguientes.



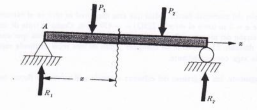
Así, una fuerza que tiende a flexar la viga de modo que la concavidad esté hacia arriba, como se representa en el esquema superior izquierdo, se dice que produce un momento flector positivo. Una fuerza que tiende a cortar la parte izquierda de la viga hacia arriba respecto a la parte derecha, como se indica en el esquema inferior izquierdo, se dice que produce un esfuerzo cortante positivo.

Un método más sencillo para determinar el signo algebraico del momento flector en una sección cualquiera es considerar que las fuerzas exteriores dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos y las dirigidas hacia abajo, momentos negativos.

ECUACIONES DE CORTANTE Y MOMENTO. Generalmente es conveniente introducir un sistema coordenado a lo largo de la viga con origen en un extremo de la misma. Es conveniente conocer el esfuerzo cortante y el momento flector en todas las secciones de la viga, para lo cual se escriben dos ecuaciones, una que da el esfuerzo cortante T en función de la distancia, x, a un extremo de ella, y la otra que da el momento flector M en función de x.

DIAGRAMAS DEL ESFUERZO CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR. La representación gráfica de estas ecuaciones en T y M se conoce como diagrama del esfuerzo cortante y del momento flector, respectivamente. En estos gráficos, las abscisas (horizontales) indican la posición de la sección a lo largo de la viga y las ordenadas (verticales) representan los valores del esfuerzo cortante y el momento flector, respectivamente. Por tanto, indican gráficamente la variación de esas dos magnitudes en una sección a lo largo de la barra. Es muy fácil determinar, con esos gráficos, el valor máximo de cada una de ellas.

RELACION ENTRE ESFUERZO CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR. Más abajo se representa una viga simplemente apoyada con varias cargas aplicadas. Se establece el sistema de coordenadas con origen en el extremo izquierdo A y las distancias a las diversas secciones de la viga se expresan por la variable x.



Para un valor cualquiera de x, el esfuerzo cortante T y el momento flector M están relacionados por la ecuación

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Esta relación se deduce en el Problema 7. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 10, 12, 13.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Escribir, para la viga en voladizo de la Fig. (*a*), las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto de la barra. Dibujar, aproximadamente a escala, los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

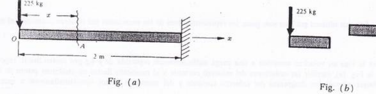


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

En este caso particular no es necesario determinar primero la reacción en el apoyo. Elijamos el eje de la viga como eje x de un sistema coordenado con origen O en el extremo izquierdo de la barra.

Consideremos una sección vertical cualquiera de la viga a la distancia general x del extremo izquierdo. La fuerza de 225 kg tiende a cortar la parte de viga a la izquierda de la sección x, hacia abajo, respecto a la parte de la derecha. Esto es, si se cortara la barra en esta sección, las dos partes se trasladarían a las posiciones relativas que se muestran en la Fig. (*b*), por lo que de acuerdo con nuestro criterio de signos es un cortante negativo. Por tanto, el esfuerzo cortante T en una sección cualquiera x es simplemente la suma algebraica de todas las fuerzas situadas a su izquierda, que en este caso es 225 kg. Así, pues,

$$T = -225 \text{ kg}$$

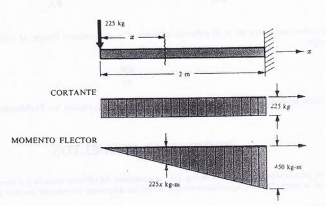
Además, nuestro criterio de signos dice que las fuerzas dirigidas hacia abajo producen momentos flectores negativos, por lo que el momento M en x, debido a la fuerza de 225 kg, es el momento de esta fuerza respecto a un eje perpendicular al plano del papel, que pasa por el punto A. La ecuación del momento flector es, pues,

$$M = -225x \text{ kg-m}$$

De la ecuación anterior del cortante es evidente que esta magnitud es constante a lo largo de toda la barra, por lo que su representación será una recta horizontal, cuya ordenada representa en cada punto el esfuerzo cortante de -225 kg en el mismo. Como el esfuerzo cortante es negativo, esta horizontal estará trazada bajo el eje, como se ve en la segunda de las figuras de abajo.

La ecuación del momento flector indica que esta magnitud es cero en el extremo izquierdo de la viga, y en el derecho donde $x = 2$ m toma el valor $-225(2) = -450$ kg-m. Como se trata de una función de primer grado en x, la representación del momento flector a lo largo de la viga es una recta que une O en la izquierda con -450 en el extremo derecho. La ordenada en cualquier punto de esta recta inclinada representa el momento flector en el punto de la viga correspondiente.

Por consiguiente, los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector tienen el aspecto que aparece a continuación.



Los dos últimos gráficos son, pues, las representaciones de las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector.

2. Para la viga en voladizo sometida a una carga uniformemente repartida de p kg por metro lineal, representada en la Fig. (a), escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cualquier punto de la barra. Dibujar además los diagramas del esfuerzo cortante y del momento flector aproximadamente a escala.

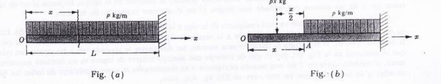


Fig. (a) Fig. (b)

Tampoco ahora es necesario hallar las reacciones en el muro de apoyo. Elegiremos el eje de la viga como eje x de un sistema coordenado, con origen O en el extremo izquierdo de la barra. Para determinar el esfuerzo cortante y el momento flector en una sección cualquiera de la viga, a una distancia x del extremo libre, podemos sustituir la parte de carga repartida a la izquierda de esta sección por su resultante. Como se ve en el vector de trazos de la Fig. (b), la resultante es una fuerza dirigida hacia abajo de px kg, que actúa en el punto medio entre O y la sección x. Obsérvese que al calcular esta resultante no se incluye ninguna carga de las situadas a la derecha de la sección. La resultante tiende a cortar la parte de barra de la izquierda, hacia abajo respecto a la parte de la derecha. Por nuestro criterio de signos, constituye un cortante negativo.

El esfuerzo cortante en esta sección x es la suma de las fuerzas de la izquierda de dicha sección. En este caso, la suma es px kg dirigida hacia abajo; por tanto,

$$T = -px \text{ kg}$$

Esta ecuación indica que el cortante es cero para $x = 0$, y cuando $x = L$, es $-pL$. Como T es una función de primer grado de x, la representación del esfuerzo cortante es una recta que une estos valores en los extremos de la viga. Tiene el aspecto representado en la Fig. (*c*). La ordenada de cada punto de esta recta inclinada representa el esfuerzo cortante en el punto correspondiente de la viga.

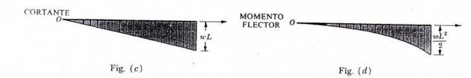


Fig. (*c*) Fig. (*d*)

El momento flector en esta misma sección x está definido por la suma de los momentos de las fuerzas de su izquierda respecto a un eje que pasa por el punto A y es perpendicular al plano del papel. Esta suma de momentos está dada por el momento de la resultante, px kg, respecto a un eje por A. Es

$$M = -px(x/2) \text{ kg-m}$$

El signo menos es debido a que las cargas dirigidas hacia abajo indican momentos flectores negativos. Por esta ecuación vemos que el momento flector es nulo en el extremo izquierdo de la barra y $-pL^2/2$ en el empotrado, en el que $x = L$. La variación a lo largo de la barra es parabólica y se puede representar como en la Fig. (*c*). La ordenada de esta parábola en cada punto representa el momento flector en el correspondiente punto de la viga.

Hay que observar que una carga uniforme dirigida hacia abajo como la considerada aquí produce un diagrama del momento flector con la concavidad hacia abajo, lo que podría haberse establecido tomando la segunda derivada de M respecto a x, que en este caso particular es $-p$. Como la segunda derivada es negativa, las reglas del cálculo nos dicen que la curva debe presentar su concavidad hacia abajo.

3. Considerar una viga en voladizo cargada solo con el par de 30 kg-m representado en la Fig. (*a*). Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la barra. Trazar los diagramas correspondientes.

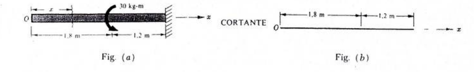


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Tampoco es necesario en este caso determinar la reacción del muro, aunque es evidente que debe consistir solo en un momento de magnitud 30 kg-m en sentido de las agujas del reloj. Elegiremos el eje de la viga como eje x del sistema coordenado de origen O, en el extremo izquierdo de la barra.

Este problema presenta ciertas características que no se daban en los anteriores porque el par no está aplicado en el extremo de la barra. El esfuerzo cortante en una sección cualquiera de la viga es la suma algebraica de las fuerzas verticales aplicadas a la izquierda de la sección elegida. Como el par no produce efecto de fuerza en ninguna dirección, no hay aplicadas a la barra fuerzas verticales y, por consiguiente, el esfuerzo cortante T es nulo para cualquier valor de x, lo que puede representarse gráficamente en el diagrama correspondiente por una recta horizontal que coincide con el eje, como se ve en la Figura (*b*).

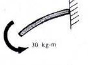
Para determinar una ecuación del momento flector es evidente que a lo largo de la viga hay que considerar dos regiones diferentes. Una está constituida por los 1.8 m a la izquierda del par aplicado y la otra por los 1.2 m

entre el par y el muro. Normalmente es conveniente expresar los valores de x en la primera región por

$0 < x < 1{,}8$ m

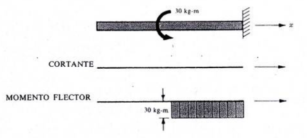
y los de la última por $1{,}8 < x < 3$ m.

Si consideramos primero una sección cualquiera a la distancia x del extremo izquierdo, siendo $0 < x < 1{,}8$, el momento flector que está definido como la suma de los momentos de las fuerzas de la izquierda de la sección, respecto a un eje que pasa por ella y es perpendicular al plano del papel, es evidentemente nulo, pues esta zona no está sometida a ninguna carga aplicada. Para cualquier sección a la derecha del par de 30 kg-m, la suma de los momentos de las cargas aplicadas respecto al eje que pasa por ella es de 30 kg-m, porque el momento del par es el mismo respecto a todos los puntos del plano. Sin embargo, hay que determinar el signo algebraico del momento flector en esta zona, lo que puede hacerse muy fácilmente comprobando que el par de 30 kg-m ha de flexar la zona de 1,2 m de la derecha en la forma representada en la figura. Como la concavidad está hacia abajo, de acuerdo con el criterio de signos se trata de un momento negativo. Por tanto, la ecuación del momento flector en la sección x es de la forma



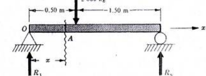
$$M = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1{,}8 \text{ m}, \qquad M = -30 \text{ kg-m} \quad \text{para } 1{,}8 < x < 3 \text{ m}$$

A continuación se muestra la viga cargada junto con los gráficos de las ecuaciones de cortante y momento.



Es interesante considerar en lugar de la viga anterior de 3 m de longitud, otra de 1,2 m cargada en su extremo libre con un par de 30 kg-m. Se hallaría que los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector de toda esta viga de 1,2 m tienen el mismo aspecto indicado antes para la zona de 1,2 m de la derecha.

4. Considerar la viga simplemente apoyada sometida a una sola carga aislada de 2.000 kg, de la figura. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga y trazar los diagramas correspondientes.



Primero es necesario determinar las reacciones exteriores R_1 y R_2. Tomando momentos respecto al punto O,

$$\Sigma M_0 = 2R_2 - 2.000(0{,}5) = 0, \qquad R_2 = 500 \text{ kg}$$

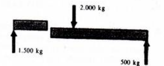
Para que exista equilibrio en la dirección vertical,

$$\Sigma F_v = R_1 + 500 - 2.000 = 0, \qquad R_1 = 1.500 \text{ kg}$$

Introduciremos también un eje x coincidente con el de la viga y con origen en el extremo izquierdo de la misma.

Consideremos el esfuerzo cortante vertical en una sección cualquiera a la distancia x del extremo izquierdo. Si nos limitamos primero a la zona de la izquierda de la carga de 2.000 kg, el esfuerzo cortante consiste en la re-

acción R_1 = 1.500 kg, porque es la única fuerza a la izquierda de esa sección. Esta fuerza tiende a cortar la parte de viga de la izquierda de x hacia arriba, respecto al resto de la barra, esto es, con las posiciones relativas representadas en la figura adjunta. De acuerdo con nuestro criterio de signos, es un cortante positivo; por tanto, en esta zona a la izquierda de la carga,



$$T = 1.500 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0.5 \text{ m}$$

En cuanto x sobrepasa de 0,5 m, el esfuerzo cortante que es la suma de las fuerzas a la izquierda de x es

$$T = 1.500 - 2.000 = -500 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0.5 < x < 2.0 \text{ m}$$

Esto es, en la zona a la derecha de la carga de 2.000 kg, la reacción izquierda produce un esfuerzo cortante positivo, la carga de 2.000 kg uno negativo y la resultante está dirigida hacia abajo, siendo negativa. Para definir el esfuerzo cortante a lo largo de la viga son necesarias estas dos ecuaciones.

En la zona de la izquierda de la carga el momento flector en la sección x es el momento de la reacción de 1.500 kg, respecto a un eje perpendicular al plano del papel por A. Es igual a

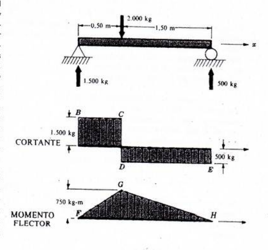
$$M = 1.500x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 0.5 \text{ m}$$

y es positivo, pues las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos. Cuando consideramos una sección a la derecha de la carga de 2.000 kg, el momento flector es debido parcialmente a la reacción de 1.500 kg y parcialmente a la carga de 2.000 kg. Su valor es

$$M = 1.500x - 2.000(x - 0.5) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0.5 < x < 2 \text{ m}$$

También son necesarias estas dos ecuaciones para definir esta magnitud a lo largo de la barra. Hay que observar que la primera expresión de M es cierta solamente si x es menor que 0,5 m. No hay posibilidad de combinar las dos ecuaciones en una que se cumpla en toda la viga.

Los gráficos de estas ecuaciones del cortante y el momento flector son muy sencillos. A la izquierda de la carga, el esfuerzo cortante es constante (1.500 kg) por lo que está representado por una horizontal BC, como se ve en el segundo de los esquemas que se acompañan. A la derecha es también constante (−500 kg), por lo que se representa por otra horizontal DE. El momento flector en la zona izquierda aumenta linealmente desde cero en el apoyo izquierdo hasta un valor máximo de 750 kg-m bajo la carga. En la parte derecha de la barra ha de ser también una función lineal de x, pues la ecuación es de primer grado y tiene el valor 750 kg-m bajo la carga y cero en el apoyo derecho. Así, pues, el diagrama del momento flector consta de dos segmentos rectilíneos, FG y GH, como se ve en el tercer esquema adjunto. Es siempre cierto que la parte de un diagrama de momentos flectores entre los puntos de aplicación de dos fuerzas aisladas es una línea recta.



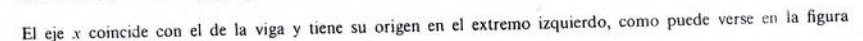
Hay que observar que la magnitud de la discontinuidad o *salto* en el diagrama del cortante en x = 0,5 m es igual a la magnitud de la fuerza aplicada en ese punto. Esto es cierto siempre en el punto de aplicación de la fuerza aislada.

5. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes para la viga simplemente apoyada sometida a tres cargas aisladas de la figura.

Primero hay que hallar las reacciones R_1 y R_2 por el equilibrio estático. Así:

$$\Sigma M_0 = 5{,}50R_2 - 1.000(1) - 750(2) - 1.250(3{,}50) = 0$$
$$\Sigma F_v = R_1 + 1.250 - 1.000 - 750 - 1.250 = 0$$

de donde $R_2 = 1.250$ kg y $R_1 = 1.750$ kg.



El eje x coincide con el de la viga y tiene su origen en el extremo izquierdo, como puede verse en la figura

Evidentemente, se necesitarán cuatro ecuaciones para definir el esfuerzo cortante y otras cuatro para el momento flector, pues hay otras tantas zonas entre las cargas aplicadas.

Examinemos primero el esfuerzo cortante. Recorriendo la viga de izquierda a derecha y recordando que el esfuerzo cortante en una sección a la distancia x del extremo izquierdo está dado por la suma algebraica de las fuerzas situadas a su izquierda, tenemos

$$T = 1.750 \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1 \text{ m}$$

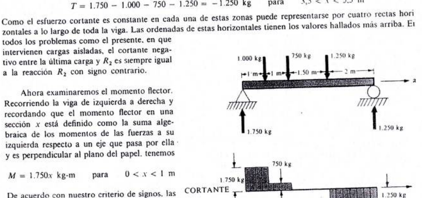
De acuerdo con nuestro criterio de signos, la reacción R_1 produce cortante positivo.

$$T = 1.750 - 1.000 = 750 \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 1 < x < 2 \text{ m}$$

De acuerdo con nuestro criterio de signos, la fuerza de 1.000 kg produce cortante negativo.

$$T = 1.750 - 1.000 - 750 = 0 \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 2 < x < 3{,}5 \text{ m}$$
$$T = 1.750 - 1.000 - 750 - 1.250 = -1.250 \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 3{,}5 < x < 5{,}5 \text{ m}$$

Como el esfuerzo cortante es constante en cada una de estas zonas puede representarse por cuatro rectas horizontales a lo largo de toda la viga. Las ordenadas de estas horizontales tienen los valores hallados más arriba. En todos los problemas como el presente, en que intervienen cargas aisladas, el cortante negativo entre la última carga y R_2 es siempre igual a la reacción R_2 con signo contrario.

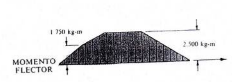


Ahora examinaremos el momento flector. Recorriendo la viga de izquierda a derecha y recordando que el momento flector en una sección x está definido como la suma algebraica de los momentos de las fuerzas a su izquierda respecto a un eje que pasa por ella y es perpendicular al plano del papel, tenemos

$$M = 1.750x \text{ kg-m} \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1 \text{ m}$$

De acuerdo con nuestro criterio de signos, las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos y las hacia abajo, negativos.

$$M = 1.750x - 1.000(x - 1) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1 < x < 2 \text{ m}$$
$$M = 1.750x - 1.000(x - 1) - 750(x - 2) \quad \text{para} \quad 2 < x < 3{,}5 \text{ m}$$
$$M = 1.750x - 1.000(x - 1) - 750(x - 2) - 1.250(x - 3{,}50) \quad \text{para} \quad 3{,}50 < x < 5{,}50 \text{ m}$$



Estas cuatro ecuaciones definen completamente el momento flector a lo largo de la viga y no se pueden sustituir por una ecuación única equivalente a las cuatro. Como todas ellas son funciones de primer grado en x, es evidente que se puede representar el momento flector por cuatro segmentos de recta. Para ello no es necesario más que determinar tres ordenadas, una bajo cada carga, que se obtienen fácilmente de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, bajo la carga de 1.000 kg, el momento flector es

$$M_{x=1} = 1.750(1) = 1.750 \text{ kg-m}$$

Bajo la segunda carga, podemos usar la ecuación para $1 < x < 2$ haciendo x igual a 2 m. Hallamos así

$$M_{x=2} = 1.750(2) - 1.000(2 - 1) = 2.500 \text{ kg-m}$$

Bajo la carga de 1.250 kg, utilizaremos la ecuación para $2 < x < 3{,}5$ m. Así, pues,

$$M_{x=3,5} = 1.750(3{,}50) - 1.000(3{,}50 - 1) - 750(3{,}50 - 2) = 2.500 \text{ kg-m}$$

Como los dos extremos de la barra están simplemente apoyados, el momento flector en esos puntos es cero.

Más arriba se han dibujado los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector, así como un esquema de la viga. Los dos primeros gráficos muestran la variación del cortante y el momento en cada punto de la viga.

6. Considerar la viga de 4 m de longitud simplemente apoyada y sometida a una carga vertical uniformemente repartida de 210 kg por metro lineal de la Fig. (a). Trazar los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

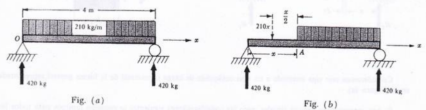


Fig. (a) Fig. (b)

La carga total de la viga es de 840 kg y, por simetría, cada una de las reacciones es de 420 kg. Consideremos ahora una sección cualquiera de la viga a la distancia x del extremo izquierdo. El esfuerzo cortante en esta sección está dado por la suma algebraica de las fuerzas a su izquierda y estas fuerzas constan de la reacción de 420 kg y la carga repartida de 210 kg/m que se extiende sobre una longitud de x metros. Podemos sustituir la parte de carga repartida a la izquierda de la sección x por su resultante, de $210x$ kg dirigida hacia abajo y representada por el vector de puntos de la Fig. (b). En esta resultante no se incluye ninguna carga de la derecha de x. Por tanto, el esfuerzo cortante en x está dado por

$$T = 420 - 210x \text{ kg}$$

Como sobre la viga no actúan cargas aisladas, esta ecuación es válida en todos sus puntos. Evidentemente, T varía linealmente desde $T = 420$ kg en $x = 0$ hasta $T = 420 - 840 = -420$ kg en $x = 4$ m. Por tanto, se puede representar la variación del esfuerzo cortante a lo largo de la viga por una recta que une esos dos valores en los puntos extremos. Este diagrama se representa en la Fig. (c). El cortante es cero en el centro de la viga.

El momento flector en la sección x está dado por la suma algebraica de los momentos de la reacción de 420 kg y la carga repartida de $210x$ kg, respecto a un eje por A perpendicular al plano del papel. Recordando que las fuerzas dirigidas hacia arriba dan momentos flectores positivos, tenemos

$$M = 420x - 210x(x/2) \text{ kg-m}$$

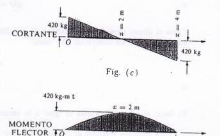


Fig. (c)

Fig. (d)

También esta ecuación es válida en toda la longitud de la viga. Hay que observar que como la carga está uniformemente repartida la resultante, expresada por el vector de trazos, actúa a la distancia x de A, esto es, en el centro de la carga uniforme de la izquierda de la sección x en que se calcula el momento flector. Por la ecuación anterior, es evidente que el momento flector a lo largo de la viga se representa por una parábola. Como la barra está simplemente apoyada, el momento es nulo en los dos extremos, y por la simetría de cargas debe ser máximo en el centro de la viga, donde $x = 2$ m. En este punto, el momento flector vale

$$M_{x=2} = 420(2) - 105(2)^2 = 420 \text{ kg-m}$$

Por tanto, puede representarse la variación parabólica del momento flector a lo largo de la barra, por las ordenadas del diagrama de la Fig. (*d*) anterior.

7. Deducir una relación entre el esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de una viga.

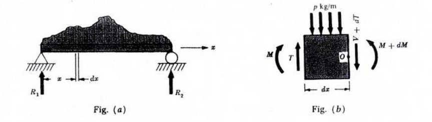


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Consideremos una viga sometida a un tipo cualquiera de carga transversal de la forma general representada en la Figura (*a*).

Se han representado apoyos simples, pero las consideraciones siguientes se cumplen también para todos los tipos de vigas. Aislemos de la viga el elemento de longitud dx representado y tracemos un esquema de cuerpo en libertad. El esfuerzo cortante T actúa al lado izquierdo del elemento y, al recorrer la distancia, dx variará, en general, una pequeña cantidad hasta $(T + dT)$. En el lado izquierdo del elemento actúa el momento M y varía a $(M + dM)$ en el lado derecho. Como dx es extremadamente pequeño, se puede suponer que la carga aplicada sobre él es uniforme e igual a p kg/m. El esquema de cuerpo en libertad del elemento aparece, entonces, como en la Fig. (*b*). Por el equilibrio de momentos respecto a O, tenemos

$$\Sigma M_O = M - (M + dM) + T\,dx - p(dx)\left(\frac{dx}{2}\right) = 0$$

o

$$dM = T\,dx + \frac{p}{2}(dx)^2$$

Como el último término es el producto de dos diferenciales, es despreciable comparado con los otros términos que solo tienen un diferencial. Por tanto,

$$dM = T\,dx$$

o

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Es decir, el esfuerzo cortante es igual a la variación del momento flector por unidad de variación de x.

Esta ecuación resultará de considerable valor para dibujar diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para los tipos de cargas más complicadas. Por ejemplo, de esta ecuación resulta evidente que si el esfuerzo cortante es positivo en una cierta sección de la viga, la pendiente del diagrama del momento flector es también positiva en ese punto. También demuestra que un cambio brusco del cortante, correspondiente a una carga aislada, va acompañado por un cambio brusco de la pendiente del diagrama del momento flector.

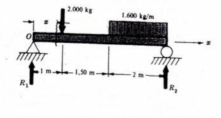
Además, en los puntos en que el cortante es nulo, la pendiente del diagrama de momentos flectores es nula. En estos puntos, en que la tangente del diagrama es horizontal, el momento debe tener un valor máximo o mínimo, como se deduce del método ordinario para hallar máximos y mínimos de una función, igualando a cero su derivada primera. Así, en los esquemas que se acompañan, si las curvas representan partes de un diagrama de momentos flectores, en los puntos A y B puede haber valores críticos.

MOMENTO FLECTOR

Para determinar el sentido de la concavidad en un punto tal como el A o el B hallaremos la segunda derivada de M respecto a x, esto es, d^2M/dx^2. Si el valor de esta segunda derivada es positivo, el diagrama de momentos tiene la concavidad hacia arriba como en A y el momento presenta un valor mínimo. Si la segunda derivada es negativa, el diagrama de momentos presenta concavidad hacia abajo, como en B, y el momento adopta un valor máximo.

Sin embargo, hay que observar que el método de cálculo para hallar los valores críticos por medio de la primera derivada no indica los posibles máximos del diagrama de momentos de tipo cuspidal como el C, si existen. Si se presenta uno de esos puntos hay que determinar el momento en él numéricamente y compararlo con otros valores que pueden ser críticos.

8. Una viga simplemente apoyada está sometida a una fuerza aislada de 2.000 kg junto con una carga repartida de 1.600 kg por metro lineal, como se ve en la figura. Escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y dibujar los diagramas correspondientes.



Primero es necesario determinar las reacciones R_1 y R_2. Por la estática, podemos escribir

$$\Sigma M_0 = 4{,}50R_2 - 2.000(1) - 3.200(3{,}50) = 0, \qquad R_2 = 2.935 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_v = R_1 - 2.000 - 3.200 + 2.935 = 0, \qquad R_1 = 2.265 \text{ kg}$$

Hay que observar que para determinar las reacciones exteriores es admisible siempre sustituir toda la carga repartida, que en este caso es de 1.600 kg/m, por su resultante, por lo que en la primera de las ecuaciones puede usarse esta resultante de 3.200 kg que, como la carga de 1.600 kg/m está repartida uniformemente, actúa en el centro de los 2 m sobre los que está distribuida ésta.

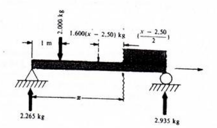
Introduciendo el eje x de la figura, con origen en el extremo izquierdo de la viga, es evidente que en la zona izquierda en la que $0 < x < 1$ m, el esfuerzo cortante es debido exclusivamente a la reacción R_1, que tiende a cortar la parte izquierda de la viga hacia arriba respecto a la parte derecha, lo que constituye un cortante positivo, por lo cual

$$T = 2.265 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

El cortante se representa, pues, en esta zona por una recta horizontal.

El esfuerzo cortante a la derecha de la carga de 2.000 kg está influenciado por R_1 y la fuerza de 2.000 kg. Esta fuerza produce cortante negativo, y tenemos

$$T = 2.265 - 2.000 = 265 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 1 < x < 2{,}50 \text{ m}$$



También ahora se representa el cortante por una horizontal.

Para los valores de x mayores de 2,5 m, en la ecuación interviene la carga repartida de 1.600 kg/m. En contraste con la sustitución que hacíamos de toda la carga repartida por su resultante para hallar las reacciones, hay que observar que ya no es posible

hacer esto. Como vamos recorriendo la viga de izquierda a derecha, solo podemos sustituir por su resultante la parte de carga repartida que está a la *izquierda* de la sección x. Es lo que se ha representado en la figura de más arriba para cualquier valor de x mayor que 2,50 m, donde la resultante corresponde a la carga situada entre $x = 2{,}50$ m y la sección x considerada. Como la carga es de 1.600 kg/m y actúa sobre una longitud de $(x - 2{,}50)$ m, la resultante, representada por el vector de trazos, es $1.600(x - 2{,}50)$ kg y actúa en el punto medio de la carga de la *izquierda* de x.

El esfuerzo cortante en x es, como sabemos, la suma algebraica de las fuerzas situadas a su izquierda:

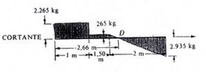
$$T = 2.265 - 2.000 - 1.600(x - 2{,}50) \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 2{,}50 < x < 4{,}50 \text{ m}$$

Así, pues, en esta zona el esfuerzo cortante es una función de primer grado en x y sus valores en los extremos se hallan fácilmente sustituyendo valores en ella. Sustituyendo $x = 2{,}50$ m,

$$T_{x=2,5} = 265 \text{ kg}$$

Sustituyendo $x = 4{,}50$ m,
$$T_{x=4,5} = -2.935 \text{ kg}$$

Ahora ya puede trazarse fácilmente el diagrama del esfuerzo cortante. En las partes izquierda y central de la barra se le representa por dos rectas horizontales con ordenadas 2.265 kg y 265 kg, respectivamente. En la parte derecha está representado por una recta inclinada que une las ordenadas 265 en $x = 2{,}50$, y -2.935 en $x = 4{,}50$. Está dibujado en el esquema adjunto.



El punto en que el cortante es cero bajo la carga repartida se halla haciendo $T = 0$ en la ecuación del cortante de esa zona. Haciendo esto, hallamos

$$2.265 - 2.000 - 1.600(x - 2{,}50) = 0, \qquad \text{de donde} \qquad x = 2{,}66 \text{ m}$$

Es el punto D del anterior diagrama de cortantes.

Las ecuaciones del momento flector en las zonas central e izquierda se hallan muy fácilmente. En una sección cualquiera x de una de estas dos regiones, el momento flector es

$$M = 2.265x \text{ kg-m} \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1 \text{ m}$$

y

$$M = 2.265x - 2.000(x - 1) \text{ kg-m} \qquad \text{para} \qquad 1 < x < 2{,}50 \text{ m}$$

De la primera de estas ecuaciones se ve que el momento es nulo en $x = 0$ y vale 2.265 kg-m para $x = 1$. Por la segunda, se obtiene el momento en $x = 2{,}50$ sustituyendo este valor:

$$M_{x=2,5} = 2.265(2{,}50) - 2.000(2{,}50 - 1) = 2.660 \text{ kg-m}$$

Por las dos ecuaciones anteriores, evidentemente el diagrama de momentos es una recta en cada una de las zonas. Estas rectas unen los valores en los puntos extremos de 0, 2.265 y 2.660 en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2{,}50$ m, respectivamente.

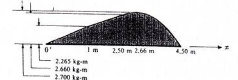
Para valores de x mayores que 2,50, en la ecuación de momentos entra la carga repartida. Para calcular el momento flector en una sección x de esta región es conveniente también sustituir la parte de la carga repartida situada a la izquierda de x, por su resultante, como se indica en el esquema anterior. Utilizando esta resultante para hallar el momento flector en x debido a la carga uniforme, hallamos,

$$M = 2.265x - 2.000(x - 1) - 1.600(x - 2{,}50)\left(\frac{x - 2{,}50}{2}\right) \text{ kg-m} \qquad \text{para} \qquad 2{,}50 < x < 4{,}50 \text{ m}$$

Así, en esta región los momentos se representan por una parábola. Esto sucede siempre bajo una carga uniformemente repartida. Si se sustituye $x = 2{,}50$ m en esta ecuación, se halla que el momento es 2.660 kg-m, como se halló utilizando la ecuación de la parte central de la viga. El extremo derecho de la barra está simplemente apoyado, por lo que el momento es nulo en $x = 4{,}50$ m. Es muy interesante calcular el momento en $x = 2{,}66$ m, pues es allí donde se anula el cortante. Por el Problema 7, como $T = dM/dx$ la pendiente del diagrama de momentos en ese punto es cero. Sustituyendo $x = 2{,}66$ m, hallamos

$$M_{x=2,66} = 2.265(2{,}66) - 2.000(1{,}66) - 1.600(0{,}16)\left(\frac{0{,}16}{2}\right)$$
$$= 2.700 \text{ kg-m}$$

Ahora podemos ya trazar el diagrama de momentos. Consta de dos rectas en las regiones izquierda y central y una parábola en la parte derecha. Esta parábola tiene una tangente horizontal en $x = 2,66$ m y, evidentemente, éste es el punto de máximo momento. A la derecha aparece el diagrama.



En el diagrama de cortantes puede observarse que solo hay un cambio gradual de cortante en $x = 2,50$ m. Como $T = dM/dx$ en todos los puntos de la barra, en el diagrama de momentos solo habrá un cambio gradual de pendiente en este punto. Por tanto, la recta y la parábola del diagrama de momentos tienen en $x = 2,50$ m una tangente común.

9. Una viga simplemente apoyada está sometida al par de 250 kg-m representado en la Fig. (*a*). Trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores debidos a esta solicitación.

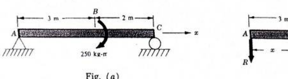


Fig. (*a*)

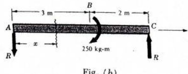


Fig. (*b*)

La viga está sometida a un par y la única manera de que se establezca el equilibrio es que las reacciones en los apoyos *A* y *C* constituyan otro par. Por tanto, estas reacciones aparecen como en la Fig. (*b*). Para que exista equilibrio,

$$\Sigma M_A = 5R - 250 = 0, \quad \text{de donde} \quad R = 50 \text{ kg}$$

Así, las dos fuerzas *R* representadas constituyen las reacciones necesarias para el equilibrio.

Adoptando el eje *x* de la figura con origen en el extremo izquierdo de la barra es evidente que en el estudio hay que considerar dos regiones. En la de la izquierda del par de 250 kg-m, el cortante es debido a la reacción izquierda *R* y tenemos

$$T = 50 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

El momento flector en esta región es negativo, pues *R* va hacia abajo y está dado por

$$M = -50x \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 3 \text{ m}$$

En cuanto se pasa a la derecha del par aplicado de 250 kg-m debemos considerar de nuevo el cortante y el momento. Como un par no tiene efecto de fuerza en ninguna dirección, y está compuesto por dos fuerzas paralelas iguales y opuestas, el esfuerzo cortante es el mismo que en la región de la izquierda, es decir,

$$T = 50 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 3 < x < 5 \text{ m}$$

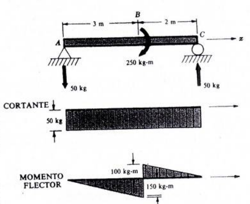
El momento flector consta del de la reacción izquierda respecto a un eje por la sección *x* y el del par de 250 kg-m. El signo algebraico del momento flector debido a este par puede determinarse suponiendo que actúa él solo en la región *BC* de la viga, en cuyo caso produce, evidentemente, una flexión del tipo representado en el esquema adjunto. De acuerdo con nuestro criterio de signos, es un momento positivo. Por tanto, el momento flector debido al par de 250 kg-m es positivo, y tenemos



$$M = -50x + 250 \quad \text{para} \quad 3 < x < 5 \text{ m}$$

Según esta ecuación, el momento en $x = 3$ m es de 100 kg-m. En realidad, éste es el momento ligeramente a la derecha del punto de aplicación del par. También, de esta ecuación, en $x = 5$ m, $M = 0$.

De acuerdo con la ecuación anterior para $0 < x < 3$ m, el momento flector para $x = 3$ m es -150 kg-m. Este es realmente el momento inmediatamente a la izquierda del par aplicado. El momento en $x = 0$ es nulo.



Así, pues, el cortante es constante e igual a -50 kg en cualquier punto de la viga, y el diagrama del momento flector es una recta en cada una de las dos regiones. Es cero en los extremos y toma los valores -150 kg-m y -100 kg-m al lado izquierdo y al derecho de B, respectivamente. A la derecha aparecen los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector

Como $T = dM/dx$ y el cortante tiene el mismo valor en todos los puntos de la viga, la pendiente del diagrama de momentos flectores es constante, por lo que las dos rectas inclinadas que lo forman son paralelas.

De aquí se ve que cuando en una barra actúa un par, el diagrama del momento flector presenta una discontinuidad brusca o *salto* en el punto de aplicación del par.

10. La viga simplemente apoyada de la Fig. (*a*) soporta una carga vertical que aumenta uniformemente desde cero en el extremo izquierdo hasta un valor máximo de 1.200 kg/m lineal en el derecho. Dibujar los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector.

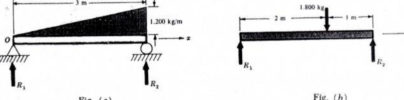


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Para determinar las reacciones R_1 y R_2 se puede sustituir toda la carga repartida por su resultante que actuará en el centro de gravedad del diagrama triangular de carga. Como la carga varía desde 0 a la izquierda hasta 1.200 kg/m en el extremo derecho, la intensidad media es de 600 kg/m y actúa sobre una longitud de 3 m. Por tanto, la carga total es de 1.800 kg y está aplicada a 2 m a la derecha del apoyo izquierdo. En la Fig. (*b*) se muestra el esquema de cuerpo libre a utilizar. Aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a esta barra, hallamos $R_1 = 600$ kg y $R_2 = 1.200$ kg.

Sin embargo, para trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores no podemos usar esa resultante. Debemos considerar la carga repartida y determinar el cortante y el momento en una sección a la distancia x del extremo izquierdo, como se ve en la Fig. (*c*) adjunta. En esta sección x se puede hallar la intensidad p de carga por los triángulos semejantes OAB y OCD como sigue:

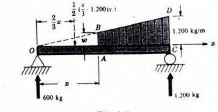


Fig. (*c*)

$p/x = 1.200/3$, de donde $p = (\frac{x}{3})1.200$ kg/m

La intensidad media de la carga sobre la longitud x es $\frac{1}{2}(x/3)1.200$ kg/m, porque es nula en el extremo izquierdo. La carga total que actúa sobre la longitud x es igual a la intensidad media multiplicada por la longitud, o sea, $\frac{1}{2}(\frac{x}{3}\ 1.200)x$ kg. Actúa en el centro de gravedad de la región triangular OAB de la figura, esto es, en un punto situado a la distancia $\frac{2}{3}x$ de O. En la Fig. (c) anterior se ha representado por un vector de trazos la resultante de esta parte de carga repartida. No se ha incluido en esta resultante ninguna parte de la carga a la derecha de la sección x.

Ahora se halla que el esfuerzo cortante en A es $T = 600 - \frac{1}{2}(\frac{x}{3}\ 1.200)x = 600 - 200x^2$

y el momento flector en A está dado por $M = 600x - \frac{1}{2}(\frac{x}{3}\ 1.200)x\ (\frac{x}{3}) = 600x - \frac{200}{3}\ x^3$.

Estas ecuaciones son ciertas en toda la longitud de la viga. Por tanto, el esfuerzo cortante se representa por una parábola que tiene el valor 600 kg cuando $x = 0$ y -1.200 kg cuando $x = 3$ m. El momento flector es un polinomio de tercer grado, que se anula en los extremos y adopta un valor máximo cuando el cortante es cero. Esto es cierto, porque $T = dM/dx$ y el punto de cortante nulo será aquel en que la tangente al diagrama de momentos es horizontal. Este punto de cortante nulo puede hallarse haciendo $T = 0$:

$$0 = 600 - 200x^2, \quad \text{de donde} \quad x = 1{,}73 \text{ m}$$

CORTANTE 600 kg 1,73 m 1.200 kg

MOMENTO FLECTOR 690 kg-m

El momento flector en este punto se halla sustituyendo este valor en la ecuación general anterior:

$$M_{x=1,73} = 600(1{,}73) - \frac{200}{3}\ (1{,}73)^3$$

$$= 690 \text{ kg-m}$$

Los diagramas del esfuerzo cortante y el momento flector aparecen en los esquemas de arriba.

11. La viga AC está apoyada en B y en C y sometida al par de 400 kg-m aplicado en A, como se muestra en la Fig. (a). Determinar las reacciones y dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

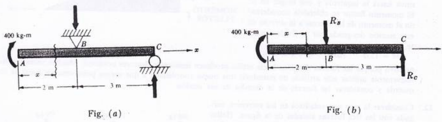


Fig. (a) Fig. (b)

Se puede dibujar el esquema de cuerpo en libertad de la barra como en la Fig. (b), con la dirección que se supone positiva para las reacciones en B y C como se indica.

Para el equilibrio estático, tenemos: $\Sigma M_B = 400 - 3R_C = 0$ o $R_C = 133$ kg
$\Sigma F_v = -R_B + 133 = 0$ o $R_B = 133$ kg

Como ambos resultados son positivos, los sentidos supuestos para R_B y R_C son correctos.

Se adopta un eje x como siempre, con origen en A. Recorriendo la viga de izquierda a derecha es evidente que en la zona AB no actúan esfuerzos cortantes verticales, por lo que podemos escribir

$$T = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

En una sección a la distancia x del extremo izquierdo, el momento flector es debido totalmente al par aplicado de 400 kg-m. Es necesario determinar el signo algebraico de este momento, lo que puede hacerse con facilidad considerando que ese par produce una curvatura de AB con la concavidad hacia arriba, lo cual, por nuestro criterio de signos, significa que es positivo y tenemos que

$$M = 400 \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \text{ m}$$

Indudablemente, el momento debido a un par es el mismo en todos los puntos de un plano.

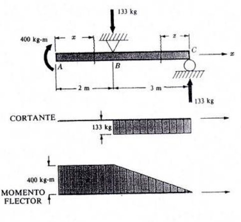
Para valores de x mayores de 2 m, en las ecuaciones del cortante y el momento interviene la reacción R_B. El esfuerzo cortante debido a R_B es negativo, pues tiende a cortar la región a la izquierda de una sección cualquiera x hacia abajo respecto a la región de la derecha. En consecuencia, tenemos

$$T = -133 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 2 < x < 5 \text{ m}$$

En BC, el momento flector a la distancia x de A es debido, en parte, al par de 400 kg-m y, en parte al momento de la reacción R_B respecto al eje perpendicular al plano del papel, que pasa por la sección x, y tenemos

$$M = 400 - 133(x - 2) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 2 < x < 5 \text{ m}$$

Sustituyendo $x = 2$ en esta ecuación, hallamos $M_{x=2} = 400$ kg-m. En $x = 5$ m, la ecuación nos da $M_{x=5} = 0$. La ecuación anterior es de primer grado en x, por lo que el momento flector viene representado en la zona BC por una recta con valores de 400 kg-m en B y 0 en C.



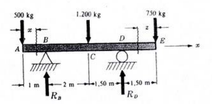
A la derecha aparecen los diagramas de cargas, de esfuerzo cortante y de momento flector. De acuerdo con la ecuación deducida antes, el cortante es nulo en AB y -133 kg en BC; por tanto, el gráfico consiste en dos rectas horizontales. El momento flector es constante (400 kg-m) en AB y disminuye linealmente hasta 0 entre B y C.

Hay que observar que podría haberse obtenido el diagrama de momentos flectores en la zona BC más sencillamente introduciendo una nueva coordenada z considerada positiva hacia la izquierda y con origen en C. El momento flector se obtendría considerando el momento de las fuerzas a la *derecha* de esta sección designada por z. Evidentemente, es

$$M = 133z \quad \text{para} \quad 0 < z < 3 \text{ m}$$

positivo porque las fuerzas dirigidas hacia arriba producen momentos flectores positivos. Muchas veces resulta conveniente utilizar este artificio de introducir una nueva coordenada z que crezca positivamente hacia la izquierda y considerar las fuerzas de la derecha de esa sección.

12. Considerar la viga con voladizos en los extremos, cargada con las tres fuerzas aisladas de la figura. Hallar las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector en un punto cualquiera de la viga y trazar los correspondientes diagramas.



Las reacciones se determinan fácilmente por la estática:

$$\Sigma M_B = 500(1) + R_D(3{,}50) - 1.200(2) - 750(5) = 0$$
$$\Sigma F_v = R_B + 1.615 - 500 - 1.200 - 750 = 0$$

de donde $\quad R_D = 1.615$ kg y $R_B = 835$ kg.

El eje x coincide con el de la viga y tiene su origen en A. Es preferible conservar el origen en A durante todo el problema que moverlo sucesivamente a B, C, etc., al estudiar las distintas partes de la viga.

Para un valor cualquiera de x, el esfuerzo cortante está dado simplemente por la suma algebraica de las fuerzas a su izquierda. Hay cuatro zonas entre fuerzas aisladas, por lo que para describir el cortante se necesitan cuatro ecuaciones:

En AB, $T = -500$ kg para $0 < x < 1$ m
En BC, $T = -500 + 835 = 335$ kg para $1 < x < 3$ m
En CD, $T = -500 + 835 - 1.200 = -865$ kg para $3 < x < 4{,}50$ m
En DE, $T = -500 + 835 - 1.200 + 1.615 = 750$ kg para $4{,}50 < x < 6$ m

Así, pues, en cada una de las cuatro zonas, el esfuerzo cortante es constante y se representa por una recta horizontal, como se ve en el diagrama de más abajo. Obsérvese que en el punto de aplicación de cada carga aislada, incluyendo las reacciones, el *salto* en la ordenada del diagrama de cortantes es igual en magnitud a la carga aplicada en ese punto.

En AB el momento flector está dado por el de la fuerza de 500 kg respecto a un eje perpendicular al plano del papel que pasa por la sección considerada x. Las fuerzas hacia abajo producen momentos flectores negativos, por lo que

$$M = -500x \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

El hecho de que la viga está en voladizo entre A y B no complica en absoluto la determinación del momento flector. El diagrama de momentos en AB es, por consiguiente, una recta que varía desde cero en A hasta -500 kg-m en B.

En la zona siguiente, BC, el momento flector está dado por

$$M = -500x + 835(x - 1) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1 < x < 3 \text{ m}$$

También se representa por una recta. El momento flector en $x = 3$ m se halla sustituyendo este valor en la ecuación

$$M_{x=3} = -500(3) + 835(2) = 170 \text{ kg-m}$$

En la zona CD, el momento flector es

$$M = -500x + 835(x - 1) - 1.200(x - 3) \quad \text{para} \quad 3 < x < 4{,}50 \text{ m}$$

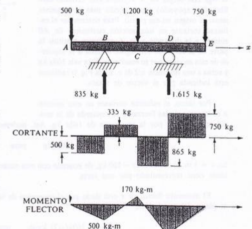
Nuevamente, la representación en CD es una recta. En $x = 4{,}50$ m se halla el momento flector expresado por esta ecuación, haciendo en ella $x = 4{,}50$:

$$M_{x=4,50} = -500(4{,}50) + 835(3{,}50) - 1.200(1{,}50) = -1.125 \text{ kg-m}$$

La ecuación del momento flector en DE se halla quizá más fácilmente introduciendo una nueva coordenada z con origen E y positiva hacia la izquierda. En una sección z, el momento flector está dado por el momento de las fuerzas a su *derecha* respecto a un eje por z perpendicular al plano del papel. Por tanto, en DE tenemos

$$M = -750z \quad \text{para} \quad 0 < z < 1{,}50 \text{ m}$$

Su representación es una recta en la zona DE.



Así, pues, el diagrama del momento flector consta de una serie de rectas, como se ve más arriba.

Es de observar que en zonas como las BC y DE en las que el esfuerzo cortante es positivo, la pendiente del diagrama del momento flector es también positiva, lo que podía esperarse por la relación $T = dM/dx$. Del mismo modo, en AB y CD el esfuerzo cortante y la pendiente del diagrama del momento flector son negativas.

13. La viga ABC está simplemente apoyada en B y C, en voladizo en la parte AB y soporta una carga uniformemente repartida de 160 kg/m lineal de viga, como se ve en la Fig. (a). Dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

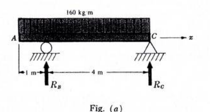


Fig. (a)

Fig. (b)

Para determinar las reacciones R_B y R_C se puede sustituir toda la carga repartida por su resultante. Esta es una fuerza de 160 kg/m × 5 m = 800 kg que actúa en el centro de la carga, esto es, a 2,5 m de cada extremo. En el diagrama de cuerpo en libertad de la Fig. (b) se representa por un vector de 800 kg. Para que haya equilibrio estático,

$$\Sigma M_B = R_C(4) - 800(1{,}50) = 0 \quad \text{o} \quad R_C = 300$$
$$\Sigma F_v = R_B - 800 + 300 = 0 \quad \text{o} \quad R_B = 500$$

Introduciremos un eje x que coincide con el de la viga con origen en A. Aunque este extremo está libre (no apoyado) sigue siendo más conveniente situar el origen en ese punto. Para determinar el esfuerzo cortante en una sección cualquiera de AB situada a la distancia x de A, podemos sustituir la parte de la carga de 160 kg/m, situada a la *izquierda* de esta sección, por su resultante. Esta vale $160x$ kg y actúa a una distancia $x/2$ de x. En la Fig. (c) adjunta está indicada por el vector de trazos.

Fig. (c)

Por tanto, el esfuerzo cortante en esta sección x es la suma de las fuerzas a la izquierda de la misma representada por la resultante de $160x$ kg. Así, podemos escribir

$$T = -160x \text{ kg} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

En $x = 1$ m, el cortante es -160 kg, de acuerdo con esta ecuación. Por consiguiente, en esta zona el esfuerzo cortante viene representado por una recta.

El momento flector en x está dado por el momento de la resultante respecto a un eje por x, perpendicular al plano del papel. Vale

$$M = -160x(x/2) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 1 \text{ m}$$

Evidentemente, la representación del momento flector a lo largo de la barra es parabólica en esta zona y varía desde cero en A hasta -80 kg-m en B, como puede verse sustituyendo $x = 1$ en la ecuación anterior. Para de-

terminar el sentido de la concavidad en el diagrama podemos hallar la segunda derivada de M respecto a x, lo que da

$$d^2M/dx^2 = -160 \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1 \text{ m}$$

El hecho de ser negativa la segunda derivada en cualquier punto de esta zona indica que la curva tiene la concavidad hacia abajo.

En cuanto pasamos a la región a la derecha de la reacción en el punto B hay que incluir esta fuerza aislada de 500 kg en la ecuación del esfuerzo cortante y en la del momento flector. Puede sustituirse también la parte de la carga repartida a la izquierda de una sección x por su resultante de $160x$ kg dirigida hacia abajo, aplicada a una distancia $x/2$ a la izquierda de dicha sección, como se ve en la Fig. (d) adjunta.

Fig. (d)

El esfuerzo cortante en x está dado por

$$T = -160x + 500 \text{ kg} \qquad \text{para} \qquad 1 < x < 5 \text{ m}$$

que se representa por una recta en la región BC. En $x = 1$ m el cortante es

$$T_{x=1} = -160(1) + 500 = 340 \text{ kg}$$

en $x = 5$ m, el cortante es

$$T_{x=5} = -160(5) + 500 = -300 \text{ kg}$$

El momento flector en x está dado por

$$M = -160x(x/2) + 500(x-1) \qquad \text{para} \qquad 1 < x < 5 \text{ m}$$

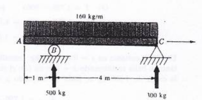
que se representa por una parábola. Sustituyendo $x = 1$, esta ecuación da

$$M_{x=1} = -160(1)(0{,}5) = -80 \text{ kg-m}$$

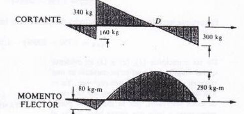
que coincide con el valor del momento flector en este punto, obtenido utilizando la ecuación para la zona AB. El momento flector para $x = 5$ m es cero, como indica la ecuación anterior. Hallando nuevamente la derivada segunda de M respecto a x, en esta zona, tenemos

$$d^2M/dx^2 = -160$$

por lo que esta parte de curva es también cóncava hacia abajo.



Los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector se pueden representar como en la figura.



Al trazar el diagrama del momento flector en BC es conveniente determinar primero la situación del punto D en el que es nulo el esfuerzo cortante. Puede hacerse tomando $T = 0$ en la ecuación del esfuerzo cortante en BC:

$$0 = -160x + 500 \qquad \text{o} \qquad x = 3{,}125 \text{ m}$$

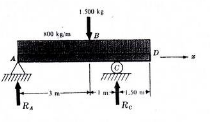
que sitúa al punto D. Como $T = dM/dx$, la tangente del diagrama del momento flector es horizontal en el punto D de cortante nulo. Es un valor crítico del momento que se suele estudiar. Debe recordarse que el método para determinar los máximos localiza los valores

máximos como el D, pero no indica los del tipo cuspidal como el B del diagrama de momentos. Por tanto, hay que estudiar los puntos de cada tipo para determinar el momento flector máximo en una viga. El momento en el punto D se halla sustituyendo en la ecuación, que es

$$M_{x=3,125} = -80(3{,}125)^2 + 500(3{,}125 - 1) = 280 \text{ kg-m}$$

La ecuación $T = dM/dx$ muestra que en las regiones como las AB y CD, en las que el cortante es negativo, la pendiente del diagrama del momento flector es también negativa. De igual modo en BD, en que el cortante es positivo, lo es también dicha pendiente. Además, como el cortante cambia bruscamente en B, la pendiente del diagrama de momentos flectores cambia bruscamente al pasar de la curva de la izquierda a la de la derecha de B, por lo que no puede existir una tangente común a las dos parábolas que constituyen el diagrama. El empleo de la relación $T = dM/dx$ permite dibujar un diagrama de momentos flectores calculando solo unos cuantos puntos.

14. La viga horizontal AD está sometida a una carga uniformemente repartida de 800 kg/m lineal y a una fuerza aislada de 1.500 kg, como puede verse en la figura. Dibujar el diagrama del esfuerzo cortante y el del momento flector en partes.



Por la estática, podemos escribir las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma M_A = 4R_C - 1.500(3) - 800(5{,}50)(2{,}75) = 0$$
$$\Sigma F_v = R_A + 4.150 - 1.500 - 800(5{,}50) = 0$$

de donde $R_C = 4.150$ kg y $R_A = 1.750$ kg.

Se adopta el eje x habitual con origen en el punto A. Hay que considerar tres regiones al estudiar el esfuerzo cortante, las AB, BC y CD. De un modo totalmente análogo al seguido en el Problema 13, se pueden escribir las ecuaciones del cortante como sigue:

(1) $T = 1.750 - 800x$ para $0 < x < 3$ m

(2) $T = 1.750 - 800x - 1.500$ kg para $3 < x < 4$ m

(3) $T = 1.750 - 800x - 1.500 + 4.150$ kg para $4 < x < 5{,}50$ m

De (1), el cortante en $x = 0$ es 1.750 kg. Inmediatamente a la izquierda de la carga de 1.500 kg, el valor del cortante se halla sustituyendo $x = 3$ m en (1); el resultado es -650 kg. El cortante inmediatamente a la derecha de la carga de 1.500 kg se halla sustituyendo $x = 3$ m en la ecuación (2), lo que da

$$T_{x=3} = 1.750 - 800(3) - 1.500 = -2.150 \text{ kg}$$

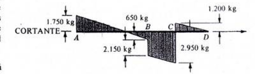
El cortante inmediatamente a la izquierda del punto C se halla sustituyendo $x = 4$ m en la ecuación (2), lo que da

$$T_{x=4} = 1.750 - 800(4) - 1.500 = -2.950 \text{ kg}$$

El cortante inmediatamente a la derecha del punto C se halla sustituyendo $x = 4$ m en (3); el resultado es

$$T_{x=4} = 1.750 - 800(4) - 1.500 + 4.150 = 1.200 \text{ kg}$$

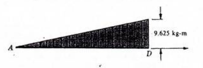
De las ecuaciones (1), (2) y (3) es evidente que el diagrama del esfuerzo cortante es una recta en cada una de las tres regiones. Ya se han determinado los valores en los extremos de estos intervalos, por lo que se les puede representar y unir por rectas para hallar el diagrama representado a la derecha.



El diagrama del momento flector se hará de modo distinto que antes. El método a utilizar consistirá en considerar cada carga

en la barra por separado y dibujar el diagrama de momentos de ella sola, como si no actuara ninguna otra en la estructura. Se dice entonces que se traza el diagrama de momentos por *partes*. Como se verá en otro capítulo posterior que trata de la flexión de las vigas, este método es útil muchas veces, aunque la elección entre él y el clásico aplicado en los problemas precedentes depende del objeto para el que se dibuja el diagrama. Sobre esto se volverá a hablar más adelante.

Recorramos la viga de izquierda a derecha. Se puede considerar que el diagrama de momentos consta de cuatro partes, una debida a la reacción R_A, otra debida a la carga uniformemente repartida, una tercera producida por la fuerza de 1.500 kg, y la última a la reacción R_C. En una sección a la distancia x del punto A, el momento flector debido a R_A sola es igual a 1.750x kg-m. Este valor es positivo porque R_A está dirigida hacia arriba. Esta misma expresión es válida para todos los valores de x a lo largo de la viga. Es una función de primer grado en x, por lo que el momento flector debido solo a R_A viene representado por una recta. En $x = 0$, el momento es nulo, y sustituyendo $x = 5{,}50$ m en la expresión anterior, se ve que en el punto D es de 9.625 kg-m. Por tanto, el momento flector en una sección cualquiera x debido solamente a esta fuerza puede representarse por el triángulo que se muestra a la derecha.



Ahora consideraremos la carga uniformemente repartida. Se despreciarán todas las demás cargas provisionalmente y se calculará el momento flector producido en una sección x por la uniforme. Procederemos como antes, es decir, sustituiremos la parte de carga a la izquierda de la sección x por su resultante, indicada por el vector de trazos de la Figura (*a*).

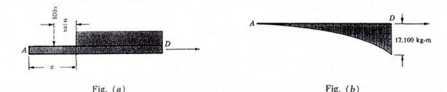


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Debido solo a la carga repartida, el momento flector en una sección cualquiera x de la viga está dado por

$$-800x(x/2) \text{ kg-m}$$

Cuando $x = 0$, esta expresión se anula, y cuando $x = 5{,}50$ m, es igual a 12.100 kg-m. Se representa por una parábola, pues la expresión es de segundo grado, como se ve en la Figura (*b*).

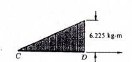
Al recorrer la viga de izquierda a derecha no aparece la influencia de la carga de 1.500 kg hasta que pasamos a la derecha de B. Desde este punto, en una sección cualquiera x, el momento flector debido solo a esta fuerza, despreciando provisionalmente todas las demás, está dado por

$$-1.500(x - 3) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 3 < x < 5{,}50 \text{ m}$$

Hay que observar que x se mide siempre desde el punto A. Cuando $x = 3$ m, el momento flector debido a esta fuerza sola es nulo, y cuando $x = 5{,}50$ m, tiene el valor -3.750 kg-m. Es una expresión de primer grado en x, por lo que el momento flector debido a esta fuerza sola se representa por una recta en la región BD, como se muestra a la derecha.

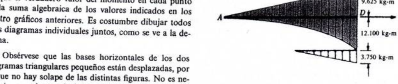


El diagrama del momento flector debido a R_C sola se puede hallar de un modo análogo. En cuanto consideremos secciones en cualquier punto de la zona CD, la fuerza R_C dará origen a un momento flector. Debido a esta fuerza sola existe un momento de 4.150(x − 4) kg-m para $4 < x < 5{,}50$ m. Cuando $x = 4$, este valor es cero, y cuando $x = 5{,}50$ m, es igual a 4.150(5,50 − 4) = 6.225 kg-m. Es una expresión de primer grado en x.



por lo que el diagrama del momento flector debido a R_C sola aparece también como un triángulo, según se representa en la página anterior.

Se han obtenido ya los diagramas de momentos debidos a cada una de las cargas, como si solo actuara una de ellas sobre la viga. En la realidad, indudablemente, todas las cargas actúan simultáneamente, por lo que el verdadero valor del momento en cada punto es la suma algebraica de los valores indicados en los cuatro gráficos anteriores. Es costumbre dibujar todos esos diagramas individuales juntos, como se ve a la derecha.



Obsérvese que las bases horizontales de los dos diagramas triangulares pequeños están desplazadas, por lo que no hay solape de las distintas figuras. No es necesario, pero hace más fácil la interpretación. La suma algebraica de las cuatro ordenadas en D es cero, lo que es lógico porque es un extremo libre. Sumando ahora las ordenadas de los distintos diagramas en cada punto se puede obtener el tipo de diagrama compuesto estudiado en los problemas anteriores. Entre A y B solo intervendrían en la suma dos cantidades; entre B y C, tres, y entre C y D, cuatro.

15. La viga AE está simplemente apoyada en B y D, tiene ambos extremos en voladizo y está sometida a una carga uniformemente repartida de 600 kg por metro lineal y a un par de magnitud 2.500 kg-m aplicado en C. Dibujar el diagrama de esfuerzos cortantes y el de momentos flectores en partes.

Las reacciones pueden determinarse por las ecuaciones del equilibrio estático siguientes:

$$\Sigma M_B = 4R_D - 2.500 - 600(7)(2) = 0, \quad R_D = 2.725 \text{ kg}$$
$$\Sigma F_v = R_B + 2.725 - 600(7) = 0, \quad R_B = 1.475 \text{ kg}$$

Se introduce un eje x con origen en el punto A. En la región AB, el esfuerzo cortante en una sección cualquiera a la distancia x del punto A está dado por la resultante de la carga repartida a su izquierda. Esta resultante es, evidentemente, una fuerza de $600x$ kg dirigida hacia arriba. Así, tenemos

$$(1) \quad T = -600x \quad \text{para} \quad 0 < x < 1{,}50 \text{ m}$$

Sustituyendo $x = 1{,}50$ m, esta ecuación nos da un valor del cortante en ese punto, de -900 kg. El cortante en $x = 0$ es, indudablemente, cero.

En cuanto pasamos a la derecha de B, en la ecuación del esfuerzo cortante aparece la reacción R_B. En la región BD, para una sección cualquiera a la distancia x de A, el cortante se obtiene sumando las fuerzas aplicadas a su izquierda. Esta suma está dada por

$$(2) \quad T = -600x + 1.475 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 1{,}50 < x < 5{,}50 \text{ m}$$

Obsérvese que en la ecuación del esfuerzo cortante no entra el par aplicado en C, porque un par no ejerce efecto de fuerza en ninguna dirección. Sin embargo, entra indirectamente, pues influye en los valores de las reacciones R_B y R_C. Sustituyendo $x = 1{,}50$ m y $x = 5{,}50$ m en (2),

$$T_{x=1,5} = 575 \text{ kg} \quad \text{y} \quad T_{x=5,5} = -1.825 \text{ kg}$$

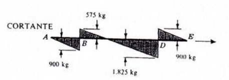
Al considerar valores de x mayores de 5,50 m hay que incluir la reacción R_D en la ecuación del esfuerzo cortante. Sumando las fuerzas a la izquierda de una sección x de la región DE, hallamos

$$(3) \quad T = -600x + 1.475 + 2.725 \text{ kg} \quad \text{para} \quad 5{,}50 < x < 7 \text{ m}$$

Sustituyendo $x = 5{,}50$ m y $x = 7$ m en esta ecuación (3), hallamos

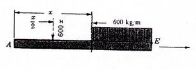
$$T_{x=5,5} = 900 \text{ kg} \quad \text{y} \quad T_{x=7} = 0 \text{ kg}$$

El esfuerzo cortante en un punto cualquiera de la barra está definido por una de las tres ecuaciones (*1*), (*2*) o (*3*), según la región en que esté el punto x. Como T es una función de primer grado en x en cada una de las regiones, el diagrama de esfuerzos cortantes está constituido por una recta en cada una de ellas. Ya se han obtenido, por sustitución, los valores en los extremos de cada región. En AB son 0 y -900 kg. En BD, 575 y -1.825 kg. Finalmente, en DE se halló que eran 900 kg, 0. Se pueden representar estos valores en los puntos correspondientes de la viga y unir por una recta en cada región las ordenadas correspondientes.



La magnitud del *salto* vertical en cada uno de los puntos B y D es, indudablemente, igual al valor de las reacciones R_B y R_D aplicadas en esos puntos.

Para trazar por partes el diagrama de momentos flectores se considera individualmente cada una de las cargas, incluyendo las reacciones, como si no actuara sobre la viga ninguna otra. Empezando por la carga uniforme de 600 kg/m se considera una sección a la distancia x del extremo izquierdo A y se calcula el momento flector producido solamente por la carga repartida. La resultante de las fuerzas repartidas a la izquierda de esta sección está representada en la figura anterior por el vector de trazos. El momento de esta resultante respecto a un eje que pasa por la sección x y es perpendicular al plano del papel es



$$M = -600x(x/2) = -300x^2 \text{ kg/m} \quad \text{para} \quad 0 < x < 7 \text{ m}$$

Por tanto, el diagrama de momentos correspondiente a la carga repartida sola es parabólico. En $x = 0$ el momento es nulo y en el extremo derecho, $x = 7$ m, la ecuación anterior nos da el valor:



$$M_{x=7} = -300(7)^2 = -14.700 \text{ kg-m}$$

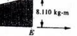
Así, pues, esta «parte» del diagrama de momentos tiene el aspecto que aparece en la figura de arriba.

Como estamos recorriendo la viga de izquierda a derecha no se considera el momento debido a la reacción R_B hasta que intervienen valores de x mayores de 1,50 m. Entonces, debido a esta carga sola, el momento de esta fuerza de 1.475 kg respecto a un eje por la sección x está dado por

$$M = 1.475(x - 1{,}50) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 1{,}50 < x < 7 \text{ m}$$

Como es una función de primer grado en x, el momento flector debido a R_B sola, se representa por una recta. De acuerdo con esta ecuación, el momento es nulo en $x = 1{,}50$ m y vale $1.475(7 - 1{,}50) = 8.110$ kg-m en el punto E. Estos dos valores en los extremos se pueden unir mediante una recta, y obtener el diagrama del momento debido a R_B solamente

Continuando el recorrido de la viga, consideraremos ahora el par de 2.500 kg-m aplicado en el punto C. Para las secciones situadas a la distancia x del punto A, en que x está a la derecha de C, en el diagrama del momento flector aparece este par aplicado. Aunque el momento producido por el par es el mismo en todos los puntos del plano, no aparece en el diagrama de momentos flectores hasta que consideramos valores de x mayores de 3 m, porque el momento flector solo tiene en cuenta los momentos de las fuerzas o pares a la izquierda de la sección considerada. Este par aplicado produce la curvatura que se mues-



tra en la figura de la página anterior. De acuerdo con nuestro criterio de signos, constituye un momento positivo. Por tanto, para el par aplicado solo, tenemos

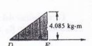
$$M = 2.500 \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 3 < x < 7 \text{ m}$$



Este valor constante se representa por una recta horizontal, como se ve en la figura adjunta.

Finalmente, en las secciones que están a la derecha del punto D en el cálculo del momento flector aparece la reacción R_D. Para una de estas secciones, a la distancia x a la derecha del punto A, el momento flector debido a R_D sola es

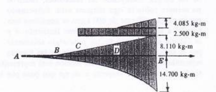
$$M = 2.725(x - 5{,}50) \text{ kg-m} \quad \text{para} \quad 5{,}50 < x < 7 \text{ m}$$



Que también se representa por una recta. En el punto D, el momento es nulo y, sustituyendo, hallamos que $M = 4.085$ kg-m en el punto E. Uniendo estos valores extremos por una recta hallamos el diagrama de momentos adjunto, debido a R_D sola.

Finalmente, se dibujan las cuatro «partes» del diagrama juntas, como se ha hecho a la derecha. Se han desplazado verticalmente las bases horizontales de cada una de las «partes» para evitar el solape entre los diversos diagramas.

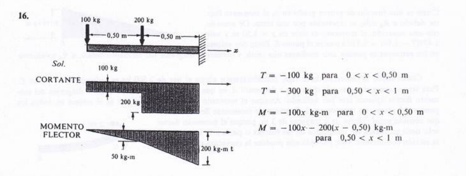
También se podría haber hecho el estudio yendo de derecha a izquierda. El diagrama por partes resultante hubiera tenido un aspecto totalmente diferente del anterior.



PROBLEMAS PROPUESTOS

Para las tres vigas en voladizo siguientes, cargadas como en los Problemas 16, 17 y 18, escribir las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector, en un punto cualquiera de la viga. Dibujar también los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores.

16.



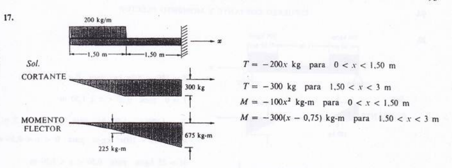
$T = -100$ kg para $0 < x < 0{,}50$ m

$T = -300$ kg para $0{,}50 < x < 1$ m

$M = -100x$ kg-m para $0 < x < 0{,}50$ m

$M = -100x - 200(x - 0{,}50)$ kg-m para $0{,}50 < x < 1$ m

17.



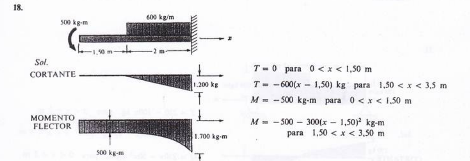
$T = -200x$ kg para $0 < x < 1{,}50$ m

$T = -300$ kg para $1{,}50 < x < 3$ m

$M = -100x^2$ kg-m para $0 < x < 1{,}50$ m

$M = -300(x - 0{,}75)$ kg-m para $1{,}50 < x < 3$ m

18.



$T = 0$ para $0 < x < 1{,}50$ m

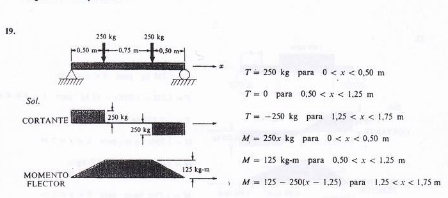
$T = -600(x - 1{,}50)$ kg para $1{,}50 < x < 3{,}5$ m

$M = -500$ kg-m para $0 < x < 1{,}50$ m

$M = -500 - 300(x - 1{,}50)^2$ kg-m para $1{,}50 < x < 3{,}50$ m

Para las nueve vigas siguientes de los Problemas 19-27, simplemente apoyadas en los extremos y cargadas como se indica, hallar las ecuaciones del esfuerzo cortante y el momento flector a lo largo de la viga y dibujar los diagramas correspondientes.

19.



$T = 250$ kg para $0 < x < 0{,}50$ m

$T = 0$ para $0{,}50 < x < 1{,}25$ m

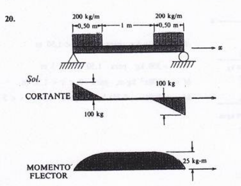
$T = -250$ kg para $1{,}25 < x < 1{,}75$ m

$M = 250x$ kg para $0 < x < 0{,}50$ m

$M = 125$ kg-m para $0{,}50 < x < 1{,}25$ m

$M = 125 - 250(x - 1{,}25)$ para $1{,}25 < x < 1{,}75$ m

20.



$T = 100 - 200x$ kg para $0 < x < 0{,}50$ m

$T = 0$ para $0{,}50 < x < 1{,}50$ m

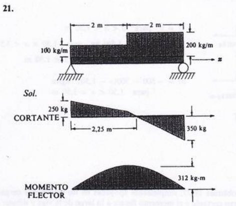
$T = -200(x - 1{,}50)$ kg para $1{,}50 < x < 2$ m

$M = 100x - 100x^2$ kg-m para $0 < x < 0{,}50$ m

$M = 25$ kg-m para $0{,}50 < x < 1{,}50$ m

$M = 25 - 100(x - 1{,}50)^2$ kg-m para $1{,}50 < x < 2$ m

21.



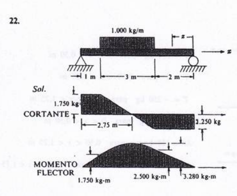
$T = 250 - 100x$ kg para $0 < x < 2$ m

$T = 50 - 200(x - 2)$ kg para $2 < x < 4$ m

$M = 250x - 50x^2$ kg-m para $0 < x < 2$ m

$M = 250x - 200(x - 1) - 100(x - 2)^2$ kg-m para $2 < x < 4$ m

22.



$T = 1.750$ kg para $0 < x < 1$ m

$T = 1.750 - 1.000(x - 1)$ kg para $1 < x < 4$ m

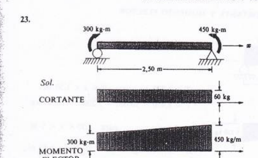
$T = -1.250$ kg para $4 < x < 6$ m

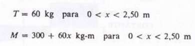
$M = 1.750x$ kg-m para $0 < x < 1$ m

$M = 1.750x - 500(x - 1)^2$ kg-m para $1 < x < 4$ m

$M = 1.250z$ kg-m para $0 < z < 2$ m

23.

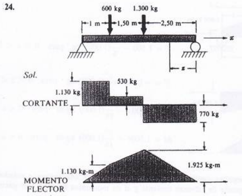




$T = 60$ kg para $0 < x < 2{,}50$ m

$M = 300 + 60x$ kg-m para $0 < x < 2{,}50$ m

24.



$T = 1.130$ kg para $0 < x < 1$ m

$T = 530$ kg para $1 < x < 2{,}50$ m

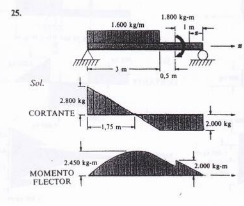
$T = -770$ kg para $2{,}50 < x < 5$ m

$M = 1.130x$ kg-m para $0 < x < 1$ m

$M = 1.130x - 600(x - 1)$ kg-m para $1 < x < 2{,}50$ m

$M = 770z$ kg-m para $0 < z < 2{,}50$ m

25.



$T = 2.800 - 1.600x$ kg para $0 < x < 3$ m

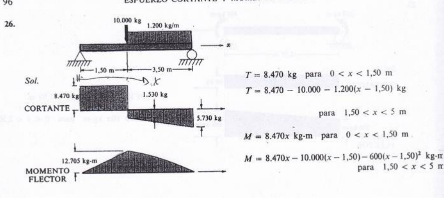
$T = -2.000$ kg para $3 < x < 4{,}50$ m

$M = 2.800x - 800x^2$ kg-m para $0 < x < 3$ m

$M = 2.800x - 4.800(x - 1{,}50)$ kg-m para $3 < x < 3{,}50$ m

$M = 2.000z$ kg-m para $0 < z < 1$

26.



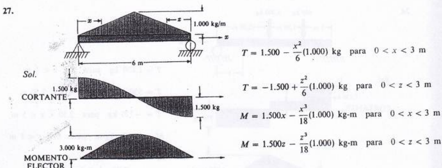
$T = 8.470$ kg para $0 < x < 1{,}50$ m

$T = 8.470 - 10.000 - 1.200(x - 1{,}50)$ kg para $1{,}50 < x < 5$ m

$M = 8.470x$ kg-m para $0 < x < 1{,}50$ m

$M = 8.470x - 10.000(x - 1{,}50) - 600(x - 1{,}50)^2$ kg-m para $1{,}50 < x < 5$ m

27.



$T = 1.500 - \frac{x^2}{6}(1.000)$ kg para $0 < x < 3$ m

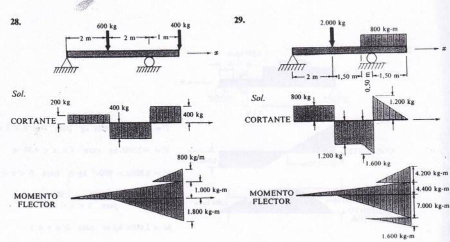
$T = -1.500 + \frac{z^2}{6}(1.000)$ kg para $0 < z < 3$ m

$M = 1.500x - \frac{x^3}{18}(1.000)$ kg-m para $0 < x < 3$ m

$M = 1.500z - \frac{z^3}{18}(1.000)$ kg-m para $0 < z < 3$ m

Para las dos vigas simplemente apoyadas siguientes, de los Problemas 28-29, con extremos volados y cargadas como se muestra, dibujar el diagrama de esfuerzo cortante y el de momentos flectores por partes.

28. **29.**



CAPITULO 7

Centros de gravedad y momentos de inercia de áreas planas

MOMENTO ESTATICO DE UN ELEMENTO DE AREA, respecto a un eje cualquiera en su plano, es el producto de su área por la distancia de dicho elemento al eje. Por ejemplo, en la figura, el momento estático dS_x del elemento da respecto al eje x está dado por

$$dS_x = y\,da$$

Respecto al eje y, el momento es

$$dS_y = x\,da$$

Para aplicaciones, véase el Problema 1.

EL MOMENTO ESTATICO DE UN AREA FINITA respecto a un eje contenido en su plano está dado por la suma de los momentos estáticos respecto a ese eje de todos los elementos de área contenidos en ella. Se suele calcular por medio de una integral. Si se representa el momento estático por S_x es

$$S_x = \int dS_x$$

Para aplicaciones, véanse los Problemas 3, 4, 5, 13, 15.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN AREA. Está definido por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\int x\,da}{A} = \frac{S_y}{A}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,da}{A} = \frac{S_x}{A}$$

donde A representa el área. Para aplicaciones, véanse los Problemas 1-5, 13, 15-17.

El centro de gravedad de un área es el punto en que puede considerarse que está concentrada, quedando invariable su momento estático respecto a cualquier eje. Por ejemplo, una placa delgada de metal estará equilibrada en un plano horizontal si está apoyada en un punto inmediatamente debajo de su centro de gravedad.

Los centros de gravedad de algunas superficies son evidentes. En una figura simétrica, como un círculo, o un cuadrado, *el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.*

Es práctica habitual representar una distancia al centro de gravedad por una barra colocada sobre la correspondiente coordenada. Así, $\bar{x}$ indica la coordenada x del centro de gravedad.

EL MOMENTO DE INERCIA DE UN ELEMENTO DE AREA respecto a un eje en su plano está dado por el producto del área del elemento y el cuadrado de la distancia entre el elemento y el eje. En la figura anterior, el momento de inercia dI_x del elemento respecto al eje x es

$$dI_x = y^2\, da$$

Respecto al eje y, el momento de inercia es

$$dI_y = x^2\, da$$

MOMENTO DE INERCIA DE UN AREA FINITA respecto a un eje en su plano es la suma de los momentos de inercia respecto de ese eje de todos los elementos de área contenidos en ella. También se halla, frecuentemente, por medio de una integral. Si se representa por I_x este momento de inercia, tenemos

$$I_x = \int dI_x = \int y^2\, da$$

$$I_y = \int dI_y = \int x^2\, da$$

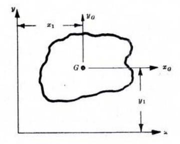
Para aplicaciones, véanse los Problemas 6, 8, 9, 11.

UNIDADES de momento de inercia son la cuarta potencia de una longitud, por ejemplo, cm^4 o m^4.

EL TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS dice que el momento de inercia de un área respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad, más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes. Para la superficie de la figura de abajo, los ejes x_G e y_G pasan por el centro de gravedad y los x e y son paralelos a ellos y están situados a las distancias x_1 e y_1. Sea A el área de la figura, I_{xG} e I_{yG} los momentos de inercia respecto a los ejes por el centro de gravedad e I_x, I_y los correspondientes a los ejes x e y. Tenemos que

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2$$

$$I_y = I_{yG} + A(x_1)^2$$



Esta relación se deduce en el Problema 7. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 10, 13-18.

AREAS COMPUESTAS. El momento de inercia de un área compuesta es la suma de los momentos de inercia de las componentes que forman el total. Esto elimina frecuentemente la necesidad de integrar cuando la superficie puede descomponerse en rectángulos, triángulos, círculos, etc., para cada uno de los cuales se conoce el momento de inercia. Véanse los Problemas 12, 13, 15-18.

RADIO DE GIRO. Si se representa el momento de inercia de una superficie A respecto al eje x por I_x, el radio de giro r_x se define por

$$r_x = \sqrt{I_x/A}$$

Del mismo modo, el radio de giro respecto al eje y está dado por

$$r_y = \sqrt{I_y/A}$$

Como I está expresado en unidades de longitud a la cuarta potencia y A en unidades de longitud a la segunda, el radio de giro tiene unidades de longitud, es decir, cm o m. Es útil muchas veces para comparaciones, pero no tiene significado físico. Véanse los Problemas 15, 16.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Situar el centro de gravedad de un triángulo.

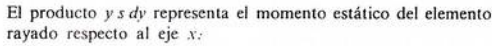
Introduzcamos el sistema de coordenadas de la figura.

La coordenada y del centro de gravedad está definida por la ecuación

$$\bar{y} = \frac{\int y\,da}{A}$$

Es más sencillo elegir un elemento tal que y sea constante para todos sus puntos. El área horizontal rayada satisface esta condición y la superficie da del elemento es $s\,dy$. Así, pues,

$$\bar{y} = \frac{\int y\,s\,dy}{A}$$



El producto $y\,s\,dy$ representa el momento estático del elemento rayado respecto al eje x.

Por triángulos semejantes, $\dfrac{s}{b} = \dfrac{h-y}{h}$. Sustituyendo el valor de s en la integral anterior

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)\,dy}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2}{h^2}\int_0^h (hy - y^2)\,dy$$

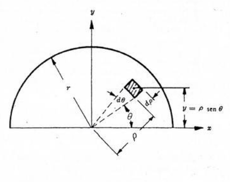
$$= \frac{2}{h^2}\{h[y^2/2]_0^h - [y^3/3]_0^h\} = \frac{2}{h^2}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}h$$

Obsérvese que se mide la altura h perpendicular a la base de longitud b.

2. Situar el centro de gravedad de un semicírculo.

Para tal contorno será lógico el sistema de coordenadas polares adoptado en la figura.

El elemento de área sombreado es aproximadamente un rectángulo y su superficie está dada por $\rho\,d\theta\,d\rho$. La coordenada y del centro de gravedad está dada por la ecuación



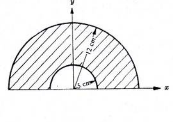
$$\bar{y} = \frac{\int y\,da}{\int da} = \frac{\int_0^\pi\int_0^r(\rho \operatorname{sen}\theta)(\rho\,d\theta\,d\rho)}{\int_0^\pi\int_0^r \rho\,d\theta\,d\rho}$$

$$= \frac{\int_0^\pi[\rho^3/3]_0^r \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\int_0^\pi[\rho^2/2]_0^r\,d\theta} = \frac{\frac{r^3}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\frac{r^2}{2}\int_0^\pi d\theta}$$

$$= \frac{2r}{3\pi}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{4r}{3\pi}$$

3. Determinar el centro de gravedad del área rayada que queda al quitar el semicírculo de radio 5 cm de la superficie semicircular de radio 12 cm.

En este caso no hay necesidad de integrar. Se puede considerar que el área rayada es la diferencia entre el semicírculo de 12 cm y el de 5 cm. La coordenada y del centro de gravedad está dada por



$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$

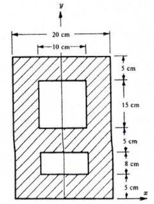
Pero el numerador de esta fracción puede calcularse, recordando que representa el momento estático del área rayada respecto al eje x, que es igual al momento estático de toda la superficie semicircular de 12 cm, menos el del semicírculo de 5 cm respecto al eje x. El momento estático del semicírculo de 12 cm respecto al eje x está dado por el producto de su área por la distancia vertical desde su centro de gravedad a dicho eje. De igual modo se obtiene el correspondiente al semicírculo de 5 cm. En el Problema 2 se halló la situación de los centros de gravedad. Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\pi(12)^2\,\frac{4(12)}{3\pi} - \frac{1}{2}\pi(5)^2\,\frac{4(5)}{3\pi}}{\frac{1}{2}\pi(12)^2 - \frac{1}{2}\pi(5)^2} = 5{,}72 \text{ cm}$$

Por simetría, este punto está en el eje y.

4. Determinar el centro de gravedad del área rayada que queda al suprimir del rectángulo original los dos más pequeños representados en la figura.

Se elige como eje y el eje vertical de simetría y para eje x la base de la figura. La coordenada y del centro de gravedad está dada por $\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$ y, por simetría, está en el eje y.

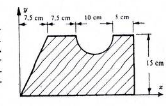


Se puede considerar que el área rayada está constituida por el rectángulo original de 20 × 38 cm, menos los dos rectángulos menores. En este caso no es necesaria la integración porque por simetría se conoce la situación de cada uno de los centros de gravedad de los tres rectángulos. El numerador de la fracción anterior representa el momento estático del área rayada respecto al eje x y se puede calcular como el momento estático del rectángulo de 25 × 38 cm, menos el de cada uno de los dos que se suprimen. El momento estático del rectángulo de 25 × 38 cm, por ejemplo, está dado por el producto de su área por la distancia desde el eje x a su centro de gravedad. que es de 19 cm. Los de los otros dos rectángulos están dados por expresiones análogas. Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{(20)(38)(19) - (10)(8)(9) - (10)(15)(25{,}5)}{(20)(38) - (10)(8) - (10)(15)} = 18{,}7 \text{ cm}$$

5. Determinar el centro de gravedad del área rayada que resulta de suprimir un ángulo y el área semicircular de la figura rectangular original.

El área rayada consta de (1) un rectángulo de 15 cm × 30 cm, menos (2) un triángulo de 15 cm × 7,5 cm y (3) un área semicircular. Tampoco es necesaria la integración, porque los centros de gravedad de (2) y (3) se determinaron en los Problemas 1 y 2, respectivamente, y se usará una suma finita.



La coordenada $\bar{y}$ del centro de gravedad está dada por $\bar{y} = \dfrac{\int y\,da}{A}$. El numerador, que representa el momento estático del área rayada respecto al eje x, se puede calcular hallando el del rectángulo y restándole el del triángulo y el del semicírculo. Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{(30)(15)(7{,}5) - \frac{1}{2}(7{,}5)(15)(10) - \frac{1}{2}\pi(5)^2[15 - \frac{4(5)}{3\pi}]}{(30)(15) - \frac{1}{2}(7{,}5)(15) - \frac{1}{2}\pi(5)^2} = 6{,}51 \text{ cm}$$

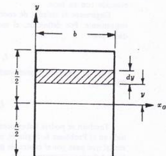
Del mismo modo se puede hallar la coordenada $\bar{x}$ por $\bar{x} = \dfrac{\int x\,da}{A}$. El numerador representa aquí el momento estático del rectángulo menos el del triángulo y del semicírculo respecto al eje x. Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{(30)(15)(15) - \frac{1}{2}(7{,}5)(15)(2{,}5) - \frac{1}{2}\pi(5)^2(20)}{(30)(15) - \frac{1}{2}(7{,}5)(15) - \frac{1}{2}\pi(5)^2} = 16{,}43 \text{ cm}$$

6. Determinar el momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje por su centro de gravedad y paralelo a la base.

Introduzcamos el sistema de coordenadas de la figura. El momento de inercia I_{xG} respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad está dado por

$$I_{xG} = \int y^2 da$$



Por conveniencia, es lógico elegir un elemento tal que y sea constante en todos sus puntos. El área rayada tiene esta característica

$$I_{xG} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12}bh^3$$

Tiene dimensión de longitud a la cuarta potencia, por ejemplo, cm^4.

7. Deducir el teorema de los ejes paralelos para áreas planas.

Consideremos el área plana A representada. Los ejes x_G e y_G pasan por su centro de gravedad, cuya posición se supone conocida. Los ejes x e y están situados a distancias conocidas y_1 y x_1, respectivamente, de los que pasan por el centro de gravedad.

Para el elemento de área da, el momento de inercia respecto al eje x está dado por

$$dI_x = (y_1 + y')^2 da$$

Para toda el área A, el momento de inercia respecto al eje x es

$$I_x = \int dI_x = \int (y_1 + y')^2 da$$

$$= \int (y_1)^2 da + 2\int y_1 y' da + \int (y')^2 da$$

La primera integral del segundo miembro es igual a $y_1^2 \int da = y_1^2 A$ porque y_1 es constante. La segunda integral es igual a $2y_1 \int y' da = 2y_1(0) = 0$ porque el eje desde el que se mide y' pasa por el centro de gravedad del área.

La tercera integral del segundo miembro es igual a I_{xG}, esto es, al momento de inercia del área respecto al eje horizontal por el centro de gravedad. Por tanto,

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2$$

Una consideración similar para la otra dirección demuestra que

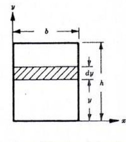
$$Y_y = I_{yG} + A(x_1)^2$$

Este es el teorema de los ejes paralelos para las áreas planas. Hay que observar que uno de los ejes que intervienen en cada ecuación ha de pasar por el centro de gravedad. En palabras, se enuncia como sigue: El momento de inercia de un área con respecto a un eje que no pasa por su centro de gravedad es igual al correspondiente al eje paralelo que pasa por dicho centro, más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

El momento de inercia es siempre positivo, con un valor mínimo para los ejes que pasan por el centro de gravedad del área considerada.

8. Determinar el momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje que coincide con su base.

Elegiremos el sistema de coordenadas indicado en la figura como más conveniente. Por definición, el momento de inercia respecto al eje x está dado por



$$I_x = \int y^2 da$$

Para el elemento representado, y es constante en todos sus puntos. Por tanto,

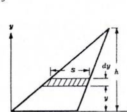
$$I_x = \int_0^h y^2 b\,dy = b[y^3/3]_0^h = \frac{1}{3}bh^3$$

También se podría haber obtenido esta solución aplicando el teorema de los ejes paralelos al resultado obtenido en el Problema 6. Según él, el momento de inercia respecto a la base es igual al correspondiente al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes. Así, pues,

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh(\frac{h}{2})^2 = \frac{1}{3}bh^3$$

9. Determinar el momento de inercia de un triángulo respecto a un eje coincidente con su base.

Elijamos el sistema de coordenadas que se representa en la figura. El momento de inercia respecto a la base horizontal es



$$I_x = \int y^2 da$$

Para el elemento sombreado, y es constante en todos los puntos, por lo que

$$I_x = \int_0^h y^2 s\,dy$$

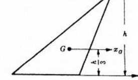
De los triángulos semejantes, tenemos

$$\frac{s}{b} = \frac{h-y}{h}$$

Sustituyendo el valor de s en la integral, hallamos

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{b}{h}[h\int_0^h y^2 dy - \int_0^h y^3 dy] = \frac{1}{12}bh^3$$

10. Determinar el momento de inercia de un triángulo respecto a un eje, por su centro de gravedad, paralelo a la base.



Sea x_G el eje que pasa por el centro de gravedad, y tomemos el eje x coincidiendo con la base, como se ve en la figura.

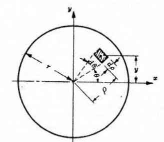
Según el Problema 1, el eje x_G está situado a la distancia $h/3$ de la base. El teorema de los ejes paralelos dice que

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2$$

Pero en el Problema 9 se determinó I_x y A e y_1 $(=h/3)$ son conocidos, por lo que podemos despejar la incógnita I_{xG}. Sustituyendo,

$$\frac{1}{12}bh^3 = I_{xG} + \frac{1}{2}bh(\frac{h}{3})^2 \qquad \text{o} \qquad I_{xG} = \frac{1}{36}bh^3$$

11. Determinar el momento de inercia de un círculo respecto a un diámetro.



Elegiremos el elemento de área rayado en la figura y utilizaremos el sistema de coordenadas polares. El radio del círculo es r.

Para hallar I_x usaremos la definición $I_x = \int y^2 da$.
Pero $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ y $da = \rho\, d\theta\, d\rho$, por lo que

$$I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \rho\, d\theta\, d\rho$$

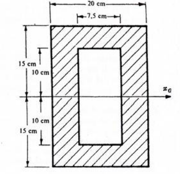
$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\, [\tfrac{1}{4}\rho^4]_0^r = \frac{r^4}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

Si expresamos por D el diámetro del círculo, es $D = 2r$ y $I_x = \dfrac{\pi D^4}{64}$. Este valor es la mitad del momento polar de inercia de un área circular completa.

Por tanto, el momento de inercia de un área semicircular respecto a un eje que coincide con su base es

$$I_x = \frac{1}{2}\,\frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{128}$$

12. Determinar el momento de inercia de un área rectangular hueca respecto a un eje por su centro de gravedad.



El eje x_G pasa por el centro de gravedad de la figura. Quizá el método más sencillo consiste en calcular el momento de inercia del rectángulo grande de 20 cm × 30 cm respecto al eje x_G y restar de él el correspondiente al rectángulo de 7,5 cm × 20 cm respecto al mismo eje.

Según el Problema 6, el momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje por su centro de gravedad y paralelo a la base está dado por

$$I_{xG} = bh^3/12$$

Así, para el área rayada tenemos

$$I_{xG} = \frac{1}{12}(20)(30)^3 - \frac{1}{12}(7,5)(20)^3 = 40.000 \text{ cm}^4$$

13. Determinar el momento de inercia de la sección T de la figura respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de gravedad.

Lo primero, es necesario situar el centro de gravedad del área. Para ello, introducimos el sistema de coordenadas x-y que se representa. Por definición, la coordenada y del centro de gravedad está dada por

$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$

El numerador de esta expresión representa el momento estático del área respecto al eje x, que puede calcularse multiplicando la superficie de cada uno de los tres rectángulos componentes 1, 2 y 3 por la distancia desde el eje x a su centro de gravedad respectivo. Así,

$$\bar{y} = \frac{(6)(4)(2) + (14)(4)(7) + (6)(4)(2)}{(6)(4) + (14)(4) + (6)(4)} = 4{,}7 \text{ cm}$$

Por tanto, el centro de gravedad está situado 4,7 cm por debajo del eje x. En la figura de arriba, el eje horizontal que pasa por este punto se representa por x_G.

Para determinar el momento de inercia buscado pueden utilizarse varios procedimientos. Uno de ellos consiste en calcular el de toda el área respecto al eje x y aplicar luego el teorema de los ejes paralelos para pasar este resultado al eje x_G.

El momento de inercia respecto al eje x se halla como suma de los momentos respecto a este mismo eje de los rectángulos componentes. En el Problema 8 se halló la expresión del momento de inercia de un rectángulo respecto a un eje que coincide con su base. Obsérvese que es más sencillo subdividir la sección T en los tres rectángulos de la figura, que de cualquier otra manera, porque por el Problema 8 conocemos su momento de inercia respecto al eje x. Así,

$$I_x = (1/3)(6)(4)^3 + (1/3)(4)(14)^3 + (1/3)(6)(4)^3 = 3.915 \text{ cm}^4$$

Para hallar el momento de inercia de toda la figura respecto al eje x_G podemos utilizar ahora el teorema de los ejes paralelos. Tendremos

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2, \qquad 3.915 = I_{xG} + 104(4{,}7)^2, \qquad I_{xG} = 1.617 \text{ cm}^4$$

14. Determinar el momento de inercia de la sección T del Problema 13 respecto a un eje horizontal x_1 por su extremo inferior.

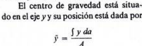
Este eje está situado $(14 - 4{,}7) = 9{,}3$ cm por debajo del eje horizontal por el centro de gravedad. Para transferir el momento de inercia conocido desde el eje x_G al x_1 se puede usar el teorema de los ejes paralelos. Por tanto,

$$I_{x_1} = I_{xG} + A(y_1)^2 = 1.617 + 104(9{,}3)^2 = 10.612 \text{ cm}^4$$

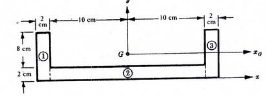
Es importante observar que solo se puede utilizar el teorema de los ejes paralelos cuando uno de ellos pasa por el centro de gravedad del área. Por ejemplo, *no* se puede transferir desde el eje x al x_1 sumando simplemente el producto del área por el cuadrado de la distancia entre esos ejes. La razón de no ser válido es que ninguno de ellos pasa por el centro de gravedad de la figura.

15. Determinar el momento de inercia y el radio de giro de la sección C representada respecto a un eje horizontal por el centro de gravedad.

El centro de gravedad está situado en el eje y y su posición está dada por



$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$



El numerador de esta expresión representa el momento estático del área respecto al eje x. El área total está compuesta por los tres rectángulos representados. El momento estático de cada uno de estos rectángulos respecto al eje x está dado por el producto de su área por la distancia desde su centro de gravedad a dicho eje. Así,

$$\bar{y} = \frac{(2)(10)(5) + (20)(2)(1) + (2)(10)(5)}{(2)(10) + (20)(2) + (2)(10)} = 3 \text{ cm}$$

El eje horizontal que pasa por el centro de gravedad está representado en la figura de arriba por x_G.

Es conveniente determinar primero el momento de inercia con respecto al eje x. En el Problema 8 se halló que el momento de inercia de cada uno de los tres rectángulos componentes respecto a un eje por su base es $I_x = bh^3/3$. Para toda la figura,

$$I_x = \frac{1}{3}(2)(10)^3 + \frac{1}{3}(20)(2)^3 + \frac{1}{3}(2)(10)^3 = 1.387 \text{ cm}^4$$

Por el teorema de los ejes paralelos,

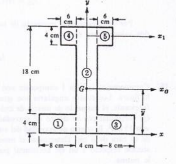
$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2, \quad 1.387 = I_{xG} + 80(3)^2 \quad \text{e} \quad I_{xG} = 667 \text{ cm}^4$$

El radio de giro respecto al eje x_G es $r_{xG} = \sqrt{I_{xG}/A} = \sqrt{667/80} = 2{,}89$ cm.

16. Determinar el momento de inercia y el radio de giro de la sección I representada respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad.

Para localizar el centro de gravedad, que está en el eje y, tenemos

$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$



La sección total se divide en los cinco rectángulos componentes que se representan, por lo que puede calcularse el numerador de la fracción anterior mediante una suma. Así,

$$\bar{y} = \frac{8(4)(2) + 22(4)(11) + 8(4)(2) + 6(4)(20) + 6(4)(20)}{(8)(4) + (22)(4) + (8)(4) + (6)(4) + (6)(4)}$$

$$= 10{,}28 \text{ cm}$$

En la figura se expresa el eje horizontal que pasa por el centro de gravedad por x_G.

Determinaremos primero el momento de inercia respecto al eje x. Para los rectángulos 1, 2 y 3 el momento de inercia respecto a este eje está dado por

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3$$

Para los rectángulos 4 y 5 es necesario determinar primero el momento de inercia respecto a un eje horizontal x_1 que pasa por sus centros de gravedad y luego aplicar el teorema de los ejes paralelos para transferir los resultados al eje x.

Por tanto, para toda la figura tenemos

$$I = (1/3)(8)(4)^3 + (1/3)(4)(22)^3 + (1/3)(8)(4)^3 + [(1/12)(6)(4)^3 + (6)(4)(20)^2]2$$
$$= 33.800 \text{ cm}^4$$

Por el teorema de los ejes paralelos, $I_x = I_{xG} + A(y_1)^2$, $33.800 = I_{xG} + 200(10{,}28)^2$ e $I_{xG} = 12.665$ cm^4.

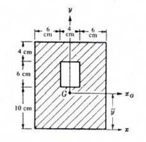
El radio de giro respecto al eje x_G es

$$r_{xG} = \sqrt{I_{xG}/A} = \sqrt{12.665/200} = 7{,}96 \text{ cm}$$

17. Determinar el momento de inercia del área rectangular hueca respecto a un eje horizontal por su centro de gravedad.

El centro de gravedad está en el eje y y su situación viene dada por

$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$



El numerador puede calcularse como momento estático de todo el rectángulo de 16 cm × 20 cm respecto al eje x, menos el momento estático del rectángulo de 4 cm × 6 cm que se ha quitado. Así,

$$\bar{y} = \frac{(16)(20)(10) - (4)(6)(13)}{(16)(20) - (4)(6)} = 9{,}76 \text{ cm}$$

El eje horizontal por el centro de gravedad se representa por x_G.

Calcularemos primero el momento de inercia del rectángulo total de 16 cm × 20 cm respecto a x_G, lo que se hace hallando el momento de inercia respecto a un eje horizontal por su centro de gravedad (suponiendo que no existe el agujero de 4 cm × 6 cm) y transfiriendo el resultado al eje x_G. Para el rectángulo de 16 cm × 20 cm, esta aplicación del teorema de los ejes paralelos da

$$I'_{xG} = (1/12)(16)(20)^3 + (16)(20)(10 - 9.76)^2 = 10.685 \text{ cm}^4$$

Del mismo modo, para el rectángulo de 4 cm × 6 cm que se quita, el momento de inercia respecto al eje x_G se halla calculando el correspondiente al eje horizontal por su centro de gravedad y transfiriendo el resultado al eje x_G. Se obtiene

$$I''_{xG} = (1/12)(4)(6)^3 + (4)(6)(13 - 9{,}76)^2 = 324 \text{ cm}^4$$

Por consiguiente, el momento de inercia del área rectangular hueca está dada por la diferencia entre esos dos valores, esto es

$$I_x = 10.685 - 324 = 10.361 \text{ cm}^4$$

18. Consideremos la viga I compuesta con la sección representada en la figura. Los cuatro angulares son iguales y, según el manual del fabricante, el momento de inercia de cada uno de ellos respecto a un eje horizontal por su centro de gravedad es de 89 cm^4 y la sección vale 15 cm^2. El centro de gravedad del angular está situado a 2,37 cm de su cara de 8 cm. Determinar el momento de inercia de toda la sección respecto a un eje horizontal por el centro de gravedad de la misma.

El eje horizontal x_G por el centro de gravedad es un eje de simetría. El momento de inercia del alma (1,5 cm × 28 cm) respecto al eje x_G es

$$I'_{xG} = (1/12)bh^3 = (1/12)(1{,}5)(28)^3 = 2.744 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia de cada angular respecto al eje x_G es igual al correspondiente al eje horizontal por su centro de gravedad más el producto del área del angular por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes. Por tanto, de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, tenemos para los cuatro angulares

$$I''_{xG} = 4[89 + 15(14 - 2{,}37)^2] = 8.471 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia de las alas, cada una de 2 cm × 20 cm, respecto al eje x_G se puede calcular también por el teorema de los ejes paralelos. Así, pues,

$$I'''_{xG} = 2[(1/12)(20)(2)^3 + (20)(2)(15)^2] = 18.027 \text{ cm}^4$$

Por lo que el momento de inercia de todo el area respecto al eje x_G es

$$I_x = 2.744 + 8.471 + 18.027 = 29.242 \text{ cm}^4$$

Este resultado desprecia el efecto de las soldaduras o de los remaches.

PROBLEMAS PROPUESTOS

19. Hallar el centro de gravedad del área rayada de la Fig. (*a*) en que se ha suprimido un rectángulo del semicírculo. *Sol.* $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5.60$ cm

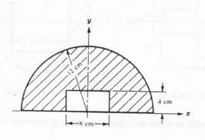


Fig. (*a*) Prob. 19

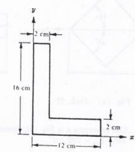


Fig. (*b*) Prob. 20

20. Hallar el centro de gravedad del angular de la Figura (*b*). *Sol.* $\bar{x} = 3.3$ cm, $\bar{y} = 5.3$ cm

21. Hallar el centro de gravedad del área rayada en la Figura (*c*). *Sol.* $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 8.37$ cm

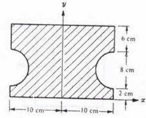


Fig. (*c*) Prob. 21

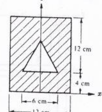


Fig. (*d*) Prob. 22

22. Hallar el centro de gravedad del área rayada que resulta de suprimir el triángulo equilátero del rectángulo de la Figura (*d*). *Sol.* $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 8.2$ cm

23. Determinar el momento de inercia de un rectángulo que tiene una base de 6 cm y una altura de 16 cm respecto a un eje por su centro de gravedad y paralelo a la base. *Sol.* $I_{xG} = 2.048$ cm^4

24. Determinar el momento de inercia de un triángulo equilátero de 12 cm de lado respecto a un eje por su centro de gravedad y paralelo a la base. *Sol.* $I_{xG} = 374.1$ cm^4

25. Determinar el momento de inercia de un círculo de diámetro 10 cm respecto a un diámetro.
Sol. $I_{xG} = 490{,}9$ cm^4

26. Determinar el momento de inercia de un cuadrante de círculo de radio 4 cm respecto a un diámetro coincidente con un lado del cuadrante. *Sol.* $I_{xG} = 50{,}27$ cm^4

27. Determinar el momento de inercia de la figura romboidal representada en la Fig. (*a*) con respecto al eje horizontal de simetría. *Sol.* $I_{xG} = 1.365$ cm^4

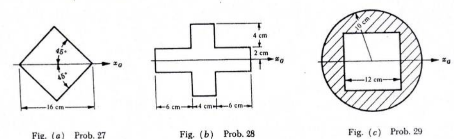


Fig. (*a*) Prob. 27 Fig. (*b*) Prob. 28 Fig. (*c*) Prob. 29

28. Con referencia a la Fig. (*b*), determinar el momento de inercia de la figura respecto al eje horizontal de simetría.
Sol. $I_{xG} = 640$ cm^4

29. Con referencia a la Fig. (*c*), determinar el momento de inercia respecto al eje x_G del área rayada que resulta de suprimir el cuadrado del círculo. El eje x_G lo es de simetría. *Sol.* $I_{xG} = 6.126$ cm^4

30. Con referencia a la Fig. (*d*), determinar el momento de inercia de la sección de ala ancha representada respecto al eje horizontal de simetría. Determinar también el radio de giro respecto al mismo eje.
Sol. $I_{xG} = 16.523$ cm^4, $r_{xG} = 7{,}47$ cm

31. Determinar el momento de inercia de la sección de ala ancha del Problema 30 respecto al eje vertical de simetría.
Sol. $I_{yG} = 46.370$ cm^4

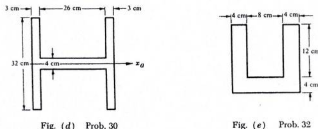
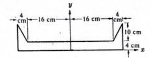


Fig. (*d*) Prob. 30 Fig. (*e*) Prob. 32

32. Determinar el momento de inercia de la sección en U de la Fig. (*e*) respecto a un eje horizontal por el centro de gravedad. ¿Cuál es el radio de giro respecto a ese mismo eje? *Sol.* $I_{xG} = 3.695$ cm^4, $r_{xG} = 4{,}80$ cm

33. Hallar el centro de gravedad de la sección en U representada más abajo y determinar su momento de inercia respecto a un eje horizontal por ese centro de gravedad. *Sol.* $\bar{y} = 3{,}07$ cm, $I_{xG} = 1.334$ cm^4



34. Considerar la sección T representada en la Fig. (*a*). Determinar la anchura *b* para que el centro de gravedad esté situado en el borde inferior del ala, esto es, en la recta *a-a*. Calcular, para este valor de *b*, el momento de inercia respecto al eje horizontal por el centro de gravedad. *Sol.* $b = 5$ cm, $I_{xG} = 1.280\ \text{cm}^4$

35. Para los cordones superiores de las vigas de puentes se usan frecuentemente secciones armadas del tipo representado en la Fig. (*b*). La sección representada consta de dos angulares y una chapa. Cada uno de los angulares tiene una sección de 32,2 cm² y un momento de inercia respecto a un eje horizontal por su centro de gravedad de 1.910 cm⁴. Determinar el momento de inercia de toda la sección respecto a un eje horizontal por su centro de gravedad. *Sol.* $I_{xG} = 6.400\ \text{cm}^4$

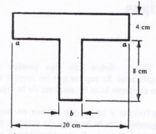


Fig. (*a*) Prob. 34

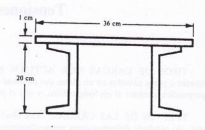


Fig. (*b*) Prob. 35

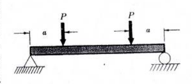
CAPITULO 8

Tensiones en vigas

TIPOS DE CARGAS QUE ACTUAN EN UNA VIGA. Sobre una viga pueden actuar fuerzas o pares situados en un plano que contiene a su eje longitudinal. Se supone que las fuerzas actúan perpendicularmente al eje longitudinal, y que el plano que las contiene lo es de simetría de la viga.

EFECTOS DE LAS CARGAS. Los efectos de estas fuerzas y pares que actúan en una viga son: (*a*) producir deformaciones perpendiculares al eje longitudinal de la barra y (*b*) originar tensiones normales y cortantes en cada sección de la viga perpendicular a su eje. En los Capítulos 9 y 10 se considerarán las deformaciones de las vigas.

TIPOS DE FLEXION. Si se aplican pares a los extremos de la viga y no actúa en ella ninguna fuerza, la flexión se llama *flexión pura*. Por ejemplo, en la viga de la figura, la parte entre las dos cargas está sometida a flexión pura. La flexión producida por fuerzas que no forman pares se llama *flexión ordinaria*. Una viga sometida a flexión pura solo tiene tensiones normales y no tensiones cortantes; en una sometida a flexión ordinaria actúan tensiones normales y cortantes en su interior.

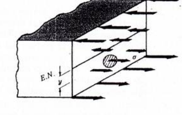


NATURALEZA DE LA ACCION DE LAS VIGAS. Es útil suponer que una viga está compuesta por infinitos cables o fibras longitudinales delgados y que cada fibra longitudinal actúa independiente de todas las demás, esto es, que no hay presiones laterales o tensiones cortantes entre ellas. Por ejemplo, la viga representada más arriba se deformará hacia abajo y las fibras de su parte inferior sufrirán un alargamiento, mientras que las de la parte superior se acortarán. Estas variaciones de longitud de las fibras producen en ellas tensiones: las que se alargan están sometidas a tensiones de tracción en la dirección del eje longitudinal de la viga, mientras que las que se acortan tienen tensiones de compresión.

SUPERFICIE NEUTRA. Siempre existe una superficie en la viga que contiene fibras que no sufren ni alargamiento ni reducción, por lo que no están sometidas a ninguna tensión de tracción o de compresión. Esta superficie se llama superficie neutra de la viga.

EJE NEUTRO. La intersección de la superficie neutra con cualquier sección de la viga perpendicular al eje longitudinal se llama eje neutro. Todas las fibras situadas a un lado del eje neutro están en estado de tracción, mientras que las del lado opuesto están en compresión.

MOMENTO FLECTOR. La suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores a un lado de una sección cualquiera de la viga respecto a un eje que pasa por dicha sección se llama momento flector en la misma. Este concepto se estudió en el Capítulo 6.



TENSIONES NORMALES EN VIGAS. En una viga cualquiera con plano de simetría, que está sometida a un momento flector M en una cierta sección, la tensión normal que actúa en una fibra longitudinal a la distancia y del eje neutro de la viga está dada por

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

donde I representa el momento de inercia del área de la sección respecto al eje neutro. Esta magnitud se estudió en el Capítulo 7. La deducción de esta ecuación se trata en detalle en el Problema 1. Para aplicaciones, véanse los Problemas 2-14, 18-20. Estas tensiones varían desde cero en el eje neutro de la viga hasta un máximo en las fibras exteriores, como puede verse. Son tracciones a un lado del eje neutro y compresiones al otro. Se les conoce también por tensiones de momento, de flexión o de las fibras.

SITUACION DEL EJE NEUTRO. El eje neutro pasa siempre por el centro de gravedad de la sección. Por tanto, el momento de inercia I que aparece en la ecuación de la tensión normal anterior es el momento de inercia de la sección respecto a un eje por el centro de gravedad.

MODULO RESISTENTE. En las fibras exteriores de la viga frecuentemente se expresa el valor de la coordenada y por el símbolo v. En este caso, las tensiones normales máximas están dadas por

$$\sigma = \frac{Mv}{I} \quad \text{o} \quad \sigma = \frac{M}{I/v}$$

A la relación I/v se la llama módulo de la sección o módulo resistente y se la suele representar por W. Sus unidades son (centímetros)^3. Por tanto, las tensiones máximas por flexión se pueden expresar en la forma

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

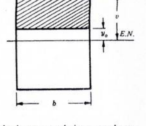
Esta fórmula presenta numerosas ventajas, porque en los manuales se encuentran valores de W para gran número de formas de perfiles estructurales de acero. Véanse los Problemas 5, 10, 15, 16.

HIPOTESIS. Para deducir la expresión anterior de las tensiones normales se ha supuesto que una sección plana de la viga, normal a su eje longitudinal antes de aplicar la carga sigue siendo plana después de aplicar las fuerzas y pares. Además, se supone que la viga es recta inicialmente y de sección uniforme y que los módulos de elasticidad en tracción y en compresión son iguales.

ESFUERZO CORTANTE. La suma algebraica de todas las fuerzas verticales a un lado de una sección cualquiera de la viga se llama esfuerzo cortante en esa sección. Este concepto se estudió en el Capítulo 6.

TENSIONES CORTANTES EN VIGAS. Para una viga cualquiera, sometida a un esfuerzo cortante T (expresado en kilogramos), en una cierta sección, se producen tensiones cortantes τ verticales y horizontales. La magnitud de las tensiones cortantes verticales en una sección cualquiera es tal que esas tensiones tienen como resultante al esfuerzo cortante T. En la sección transversal de la viga representada más abajo el plano vertical de simetría contiene a las fuerzas aplicadas y el eje neutro pasa por el centro de gravedad de la sección. La coordenada y se mide desde el eje neutro y se representa por I el momento de inercia de *toda* la sección respecto al eje neutro. La tensión cortante en todas las fibras a la distancia y_0 del eje neutro está dada por la fórmula

$$\tau = \frac{T}{Ib}\int_{y_0}^{v} y\,da$$



donde b representa la anchura de la viga en el punto en que se calcula dicha tensión. En el Problema 21 se deduce esta expresión. Para aplicaciones, véanse los Problemas 22-28. La integral $\int_{y_0}^{v} y\,da$ representa el momento estático del área rayada de la sección transversal respecto al eje neutro. Esta magnitud se estudió en detalle en el Capítulo 7. Con más generalidad, la integral representa siempre el momento estático respecto al eje neutro de la parte de la sección entre el plano horizontal en el que se produce la tensión cortante τ y la cara exterior de la viga, esto es, del área entre y_0 y v.

De la expresión anterior resulta evidente que la tensión cortante máxima tiene lugar siempre en el eje neutro de la viga, mientras que en las fibras extremas es siempre nula. Es al contrario de la distribución de la tensión normal en la sección transversal, pues ésta varía desde cero en el eje neutro hasta un máximo en las fibras extremas.

En una viga de sección rectangular, la ecuación anterior de la tensión cortante se convierte en

$$\tau = \frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

donde τ representa la tensión cortante en una fibra a la distancia y_0 del eje neutro y h la altura de la viga. Por tanto, la distribución de la tensión cortante vertical en la sección rectangular es parabólica y varía desde cero en las fibras extremas hasta un máximo en el eje neutro. Esta expresión se deduce en el Problema 22. Para aplicaciones, véanse los Problemas 23, 24, 25, 26.

Todas las ecuaciones anteriores de la tensión cortante dan los valores de estas tensiones tanto verticales como horizontales en un punto, como se ve en el Problema 21, pues las intensidades son siempre iguales en las dos direcciones.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir una expresión que relacione el momento flector en una sección cualquiera de una viga y la tensión de flexión en cualquier punto de esa sección.



Fig. (*a*) Fig. (*b*)

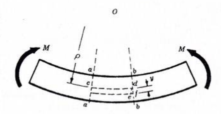
La viga representada en la Fig. (*a*) está cargada con los dos pares M, por lo que está en equilibrio estático. Como el momento flector tiene el mismo valor en todos los puntos de la barra, se dice que la viga está en un estado de *flexión pura*. Para determinar la distribución de tensiones, cortemos la viga por un plano que pase por ella perpendicularmente a su eje geométrico. De este modo, las fuerzas a determinar son exteriores al nuevo cuerpo formado, aun cuando fueran efectos internos con respecto al cuerpo original sin cortar.

El diagrama de cuerpo en libertad de la parte de viga a la izquierda del plano de corte aparece ahora como en la Fig. (*b*). Evidentemente, debe actuar un momento M sobre la sección cortada por el plano para que la parte

izquierda de la viga esté en equilibrio estático. Este momento M que actúa en la sección del corte representa el efecto de la parte derecha de la viga sobre la izquierda. Como se ha suprimido la parte derecha, hay que sustituirla por su efecto sobre la izquierda, y este efecto está representado por el momento M, que es la resultante de los momentos de las fuerzas que actúan perpendicularmente a la sección de corte en el plano del papel. Ahora es necesario hacer ciertas hipótesis para determinar la naturaleza de la variación de estas fuerzas sobre la sección.

Es útil considerar que la viga está formada por un número infinito de hilos o fibras delgadas longitudinales. Se supone que cada fibra longitudinal actúa independientemente de cada una de las demás, esto es, que no hay presiones laterales ni tensiones cortantes entre dos fibras contiguas, por lo que cada una está sometida solamente a tracción o compresión axial. Se supone además que una sección plana de la viga normal a su eje antes de aplicar la carga sigue siendo plana y normal al eje después de aplicarla. Finalmente, se admite también que el material sigue la ley de Hooke y que el módulo de elasticidad en tracción y en compresión son iguales.

Consideremos ahora dos secciones transversales contiguas aa y bb marcadas en el lado de la viga, como se ve en la figura adjunta. Antes de aplicar la carga, estas secciones son paralelas entre sí. Después de aplicar los momentos, estas secciones siguen siendo planas, pero han girado entre ellas hasta la posición representada, donde O es el centro de curvatura de la viga. Evidentemente, las fibras de la cara superior de la viga están en un estado de compresión, mientras que las de la cara inferior se han alargado ligeramente, por lo que están en tracción. La línea cd es la traza de la superficie en la que las fibras no sufren ninguna deformación durante la flexión y que se llama superficie neutra, y su intersección con una sección cualquiera es el eje neutro. El alargamiento de la fibra longitudinal situada a la distancia y (considerada positiva hacia abajo) se puede hallar trazando la línea de paralela a aa. Si ρ representa el radio de curvatura de la viga flexada, de los triángulos semejantes cOd y edf, hallamos que la deformación de esta fibra es



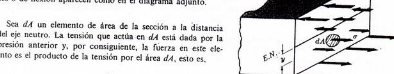
(1) $$\epsilon = \frac{ef}{cd} = \frac{de}{cO} = \frac{y}{\rho}$$

Por tanto, las deformaciones de las fibras longitudinales son proporcionales a la distancia y al eje neutro.

Como se cumple la ley de Hooke y, por tanto, $E = \sigma/\epsilon$, o $\sigma = E\epsilon$, se deduce inmediatamente que las tensiones que existen en las fibras longitudinales son proporcionales a la distancia y desde el eje neutro.

(2) $$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

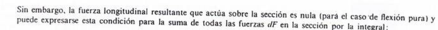
Consideremos una viga de sección rectangular, aunque la deducción sirve realmente para cualquier sección que tenga un plano de simetría. En este caso, esas tensiones longitudinales o de flexión aparecen como en el diagrama adjunto.



Sea dA un elemento de área de la sección a la distancia y del eje neutro. La tensión que actúa en dA está dada por la expresión anterior y, por consiguiente, la fuerza en este elemento es el producto de la tensión por el área dA, esto es,

(3) $$dF = \frac{Ey}{\rho}dA$$

Sin embargo, la fuerza longitudinal resultante que actúa sobre la sección es nula (para el caso de flexión pura) y puede expresarse esta condición para la suma de todas las fuerzas dF en la sección por la integral:



(4) $$\int \frac{Ey}{\rho}dA = \frac{E}{\rho}\int y\,dA = 0$$

Evidentemente, $\int y\,dA = 0$; y esta integral representa el momento estático de la sección respecto al eje neutro, pues y se mide desde este eje, pero según el Capítulo 7, podemos escribir $\int y\,dA = \bar{y}A$, donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro al centro de gravedad de la sección. De aquí se ve que $\bar{y}A = 0$, y como A no es cero, ha de serlo $\bar{y}$, o sea, que $\bar{y} = 0$. Por tanto, el eje neutro pasa siempre por el centro de gravedad de la sección.

El momento de la fuerza elemental dF respecto al eje neutro está dado por

(5)
$$dM = y\,dF = y\left(\frac{Ey}{\rho}dA\right)$$

La resultante de los momentos de todas esas fuerzas elementales en toda la sección ha de ser igual al momento flector M que actúa en ella, por lo que podemos escribir

(6)
$$M = \int \frac{Ey^2}{\rho}dA$$

Pero $I = \int y^2\,dA$, por lo que tenemos

(7)
$$M = \frac{EI}{\rho}$$

Hay que observar que este momento de inercia de la sección está calculado respecto al eje por el centro de gravedad de la misma. Pero tenemos que

(8)
$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

Eliminando ρ de estas dos ecuaciones, obtenemos

(9)
$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Esta fórmula da las llamadas tensiones de flexión en la viga. En ella, M es el momento flector en una sección cualquiera, I el momento de inercia de la sección respecto a un eje por el centro de gravedad de la misma e y la distancia desde el eje neutro (que pasa por el centro de gravedad) a la fibra en la que actúa la tensión σ.

Frecuentemente, se representa el valor de y en las fibras extremas de la viga por v, en las que las tensiones de flexión son máximas y tienen un valor

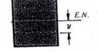
(10)
$$\sigma = \frac{Mv}{I}$$

2. Una viga está sometida a un par de 12.000 kg-cm en cada uno de sus extremos, como se ve en el diagrama adjunto. La viga es de acero y de sección rectangular con 2 cm de anchura y 4 cm de altura. Determinar las tensiones de flexión máximas en la viga e indicar su variación en la altura de la misma.



Según el Problema 1, se produce una flexión respecto al eje neutro horizontal representado por $E.\ N.$, eje que pasa por el centro de gravedad de la sección. El momento de inercia de la sección rectangular rayada respecto a este eje es, según se halló en el Problema 6 del Capítulo 7,

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(2)(4)^3 = 10{,}67\ \text{cm}^4$$

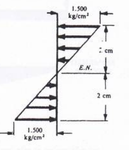


Por el Problema 1 sabemos también que la tensión de flexión a la distancia y del eje neutro está dada por $\sigma = My/I$, donde y tiene la significación que aparece en el diagrama adjunto. Así, todas las fibras longitudinales de la viga a la distancia y del eje están sometidas a las mismas tensiones de flexión dadas por la fórmula anterior.

Como M e I son constantes a lo largo de las barras, es indudable que las tensiones de flexión máximas tienen lugar en las fibras en que y adquiere su mayor valor, que son

las de las caras superior e inferior y, por simple inspección, resulta evidente que para el sentido de las cargas representado las fibras superiores están comprimidas y las inferiores sufren tracción. Para las fibras inferiores, $y = 2$ cm, y la tensión máxima es

$$\sigma = \frac{8.000(2)}{10,67} = 1.500 \text{ kg/cm}^2$$



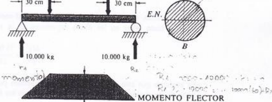
Para las fibras de la cara superior se puede considerar que y es negativo y tenemos

$$\sigma = \frac{8.000(-2)}{10,67} = -1.500 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, las tensiones máximas son de 1.500 kg/cm² en tracción para todas las fibras de la cara inferior de la viga, y de 1.500 kg/cm² en compresión para todas las de la cara superior. De acuerdo con la fórmula $\sigma = My/I$, las tensiones de flexión varían linealmente desde cero en el eje neutro hasta un máximo en las fibras extremas, por lo que la variación en la altura de la viga se puede representar como en la figura adjunta.

3. Una viga de sección circular de 18 cm de diámetro está simplemente apoyada en cada extremo y sometida a dos cargas aisladas de 10.000 kg cada una aplicadas a 30 cm de los extremos. Determinar las tensiones de flexión máximas en la viga.

Aquí, el momento no es constante a lo largo de la viga, como sucedía en el Problema 2. En el esquema adjunto se representa la carga y el diagrama de momentos obtenido por los métodos del Capítulo 6. Hay que observar que la parte de viga entre las dos cargas de 10.000 kg está en la condición llamada *flexión pura* y en cualquier parte de esta zona el momento flector es igual a



$$(10.000)(30) = 300.000 \text{ kg-cm}$$

Según el Problema 11 del Capítulo 7, el momento de inercia de la sección circular sombreada respecto al eje neutro que pasa por el centro de gravedad del círculo es

$$I = \pi D^4/64 = \pi(18)^4/64 = 5.150 \text{ cm}^4$$

La tensión de flexión a la distancia y del eje neutro horizontal representado es $\sigma = My/I$. Evidentemente, las máximas se producen en las fibras situadas en los extremos de un diámetro vertical, designadas en la figura por A y B. Esta tensión máxima es la misma en todos esos puntos entre las cargas aplicadas. En el punto B, $y = 9$ cm y la tensión vale

$$\sigma = \frac{300.000(9)}{5.150} = 524 \text{ kg/cm}^2 \text{ en tracción}$$

En el punto A, la tensión es de 524 kg/cm² en compresión.

4. Una viga de acero en voladizo de 5 m de longitud está sometida a una carga aislada de 150 kg en su extremo libre. La viga tiene sección rectangular de 5 cm de anchura y 8 cm de altura. Determinar la magnitud y situación de las tensiones de flexo-tracción y compresión en la viga.

En el Problema 1 del Capítulo 6 se determinó el diagrama de momentos flectores de este tipo de carga: es triangular con una ordenada máxima en el muro de apoyo, como se ve más abajo en la Fig. (*a*). El momento flec-

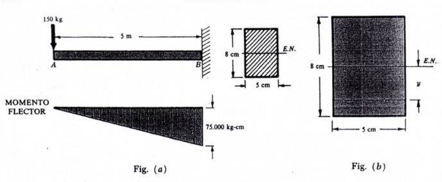


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

tor máximo no es más que el correspondiente a la fuerza de 150 kg respecto a un eje por el punto B perpendicular al plano del papel. Vale 150(500) = 75.000 kg-cm.

La tensión de flexión a la distancia y del eje neutro, que pasa por el centro de gravedad de la sección, es $\sigma = My/I$, donde y tiene el significado que aparece en la Fig. (*b*). En esta expresión, I representa el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro, que está dado por

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(5)(8)^3 = 213{,}3 \text{ cm}^4$$

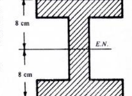
Por tanto, en el muro de apoyo en el que el momento flector adopta su valor mayor, la tensión de tracción máxima tiene lugar en las fibras superiores de la viga y vale

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{75.000(4)}{213{,}3} = 1.405 \text{ kg/cm}^2$$

Es evidente que esta tensión ha de ser de tracción porque todos los puntos de la viga flexan hacia abajo. El máximo de la tensión de compresión tiene lugar en las fibras inferiores contiguas al muro y es igual a 1.405 kg/cm².

5. Consideremos el Problema 4 en el caso en que se sustituye la viga rectangular por un perfil comercial de acero, designado por H 160. Esta nomenclatura indica que la altura del perfil es de 16 cm y que es de los llamados de *ala ancha*. Determinar las tensiones de tracción y compresión máximas.

Esta viga tiene la sección representada en el esquema adjunto y el momento se produce respecto al eje neutro horizontal que pasa por el centro de gravedad. Hay manuales que presentan las características de los distintos perfiles laminados para el uso del proyectista y al final de este capítulo se incluye una tabla reducida. Según esa tabla, el momento de inercia respecto al eje neutro es de 2.630 cm⁴.



La tensión a la distancia y del eje neutro está dada por $\sigma = My/I$. En las fibras extremas, $y = v$, y

$$\sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{M}{I/v}$$

A la relación I/v se le designa por *módulo resistente* y se le suele representar por W. Sus unidades son, indudablemente, cm³. En la tabla, hallamos fácilmente que W es 329 cm³. Si solo interesan las tensiones por flexión que se producen en las fibras extremas, que es el caso más frecuente, pues generalmente solo interesan los máximos valores, es muy útil el empleo del módulo resistente, particularmente en perfiles normalizados.

Por tanto, las tensiones en las fibras extremas en la sección inmediata al muro están dadas por

$$\sigma = \frac{M}{I/v} = \frac{M}{W} = \frac{75.000}{329} = 228 \text{ kg/cm}^2$$

Nuevamente, como las fibras de la cara superior de la viga están extendidas, la tensión en ellas será tracción. En la cara inferior, las fibras se acortan y en ellas la tensión es de compresión.

6. Una viga simplemente apoyada tiene 3 m de largo y 6 × 10 cm de sección. En un punto a 1,20 m de un apoyo, soporta una carga aislada de 2.000 kg. Determinar la tensión máxima por flexión de la viga, así como los valores de dicha tensión en las fibras exteriores en la sección media entre los dos apoyos.

En el Problema 4 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de momentos flectores de este tipo de cargas. La viga cargada, junto con el diagrama de momentos, puede representarse como en la Fig. (*a*), después de hallar las reacciones por la estática. La observación del diagrama de momentos revela que el máximo tiene lugar en la sección

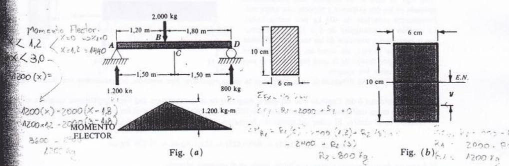


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

en que está aplicada la carga de 2.000 kg. Su valor es igual al momento de la reacción de 1.200 kg respecto a un eje por *B* perpendicular al plano del papel. Es igual a

$$1.200(1{,}20) = 1.440 \text{ kg-m} = 144.000 \text{ kg-cm}$$

Indudablemente, se podría haber obtenido el mismo valor calculando el momento de la reacción de 800 kg respecto al punto *B*. La tensión por flexión a la distancia *y* del eje neutro, que pasa por el centro de gravedad de la sección, es $\sigma = My/I$, donde *y* tiene el significado de la Fig. (*b*). Para una sección rectangular,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6)(10)^3 = 500 \text{ cm}^4$$

Así, pues, bajo la carga aislada, en una fibra a la distancia *y* del eje neutro la tensión vale

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{144.000\,y}{500}$$

En las fibras inferiores $y = 5$ cm y en ellas adopta la tensión su valor máximo de

$$\sigma = \frac{144.000(5)}{500} = 1.440 \text{ kg/cm}^2$$

La observación de la viga revela que todas las fibras de la cara inferior de la barra están en tracción y las de la cara superior en compresión. La tracción máxima es de 1.440 kg/cm² en la cara inferior y la compresión máxima 1.440 kg/cm² en la superior.

Para determinar la tensión en el punto medio entre los apoyos, es necesario calcular antes el momento flector en la sección *C*, que es el momento de la reacción de 800 kg respecto a un eje por *C* perpendicular al plano del papel. Es de 800(1,50) = 1.200 kg-m o 120.000 kg-cm. El momento de inercia es, indudablemente, 500 cm⁴ y, por tanto, la tensión por flexión en una fibra a la distancia *y* del eje neutro es

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{120.000\,y}{500}$$

En las fibras inferiores y adopta su valor máximo de 5 cm y es

$$\sigma = \frac{120.000(5)}{500} = 1.200 \text{ kg/cm}^2$$

Para todas las fibras de la cara inferior de la viga, en la sección central C la tracción es de 1.200 kg/cm². En todas las fibras de la cara superior existe una compresión de igual valor en esa misma sección.

7. Una viga de 2,50 m de longitud está simplemente apoyada en los dos extremos y soporta una carga uniformemente repartida de 400 kg por metro lineal. La sección es rectangular de 6 × 12 cm. Determinar la magnitud y situación de las tensiones máximas por flexión en la viga, así como las tensiones en un punto 2 cm por debajo de la cara superior en la sección media entre los apoyos.

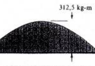
Más arriba se ha dibujado la viga junto con la carga repartida. Por simetría, las reacciones son de 500 kg cada una.

En el Problema 6 del Capítulo 6 se vio que el diagrama de momentos para una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida es parabólico y que varía desde cero en los extremos de la barra hasta un máximo en el centro. El valor del momento flector en el centro de la viga es

$$M_{x=1,25} = 500(1,25) - 500(0,625) = 312,5 \text{ kg-m} = 31.250 \text{ kg-cm}$$

El diagrama de momentos aparece, por tanto, como en el esquema adjunto.

Como el momento flector máximo tiene lugar en el centro de la viga, también la tensión máxima por flexión se producirá en ese lugar para $x = 1,25$ m. En una fibra cualquiera situada a la distancia y del eje neutro en esa sección la tensión es



MOMENTO FLECTOR

$$\sigma = My/I = 31.250\ y/I$$

En el Problema 6 del Capítulo 7 se halló que el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6)(12)^3 = 864 \text{ cm}^4$$

Por tanto, en la sección central $\sigma = \dfrac{31.250\,y}{864}$

La tensión máxima se produce en las fibras extremas superiores e inferiores. En las inferiores, $y = 6$ cm, y

$$\sigma = 31.250(6)/864 = 217 \text{ kg/cm}^2$$

Observando la figura se ve que las fibras de la cara inferior de la viga han sufrido un alargamiento, por lo que la tensión en ellas es de tracción. En las fibras superiores, $y = -6$ cm y existe una tensión de compresión de la misma magnitud.

En un punto a 2 cm por debajo de la cara superior de la viga, en esta sección central, la tensión por flexión es

$$\sigma = 31.250(-4)/864 = -145 \text{ kg/cm}^2$$

Hay que observar que en este cálculo se ha tomado y negativo, pues el punto considerado está sobre el eje neutro. Por consiguiente, la tensión es de compresión, como indica el signo negativo final.

8. Consideremos nuevamente la viga uniformemente cargada del Problema 7. Determinar las tensiones por flexión máximas si se considera, además de la carga de 400 kg por metro lineal, el peso de la viga, que es de acero y pesa 7,8 kg/dm³.

Como la sección de la viga es de 6 × 12 cm, el volumen de 1 m de longitud es (6)(12)(100) = 7.200 cm³, y su peso 7.200 × 0,0078 = 56,1 kg.

Para el diseño, al peso de la viga se le llama peso propio, o carga fija. Se puede considerar que este peso propio actúa además de la carga de 400 kg/m. A esta carga aplicadá se le llama sobrecarga. Los 56,1 kg actúan uniformemente sobre cada metro de viga, por lo que la carga resultante es de 400 + 56,1 = 456,1 kg/m.

La carga total sobre toda la viga es 456,1(2,50) = 1.140 kg, por lo que cada reacción en el extremo vale 570 kg, y el momento flector en el centro de la viga

$$M_{x=2,5} = 570(1,25) - 570(0,625) = 456 \text{ kg-m} = 35.600 \text{ kg-cm}$$

El diagrama de momentos flectores tiene el mismo aspecto que el del Problema 7, pero su ordenada máxima en el centro vale 356 kg-m.

Las tensiones por flexión máximas se producen en las fibras extremas de la viga en el punto medio entre los apoyos y están dadas por $\sigma = My/I$ con $y = 6$ cm como antes. Sustituyendo,

$$\sigma = 35.600(6)/864 = 247 \text{ kg/cm}^2$$

El valor que se obtuvo antes, de 217 kg/cm², despreciando el peso de la viga, era 12,1 % menor que este valor. En la práctica, casi siempre es necesario tener en cuenta el peso.

9. Una viga en voladizo de 3 m de longitud está sometida a una carga uniformemente repartida de 2.000 kg por metro lineal. La tensión de trabajo admisible en tracción o compresión es de 1.400 kg/cm². Si la sección debe ser rectangular, determinar sus dimensiones siendo la altura doble que la anchura.

En el Problema 2 del Capítulo 6 se determinó el diagrama de momentos para una viga en voladizo con carga uniforme y se halló que era parabólico, variando desde cero en el extremo libre de la viga hasta un máximo en el muro de apoyo. A la derecha se ha representado la viga cargada y el diagrama de momentos flectores. El momento máximo, en el muro, está dado por

$$M_{x=3} = 6.000(1,50) = 9.000 \text{ kg-m} = 900.000 \text{ kg-cm}$$

2.000 kg/m

3 m

MOMENTO FLECTOR

900.000 kg-cm

Es de observar que este problema entraña el diseño de una viga, mientras que en todos los anteriores de este capítulo se trataba de hallar las tensiones que actuaban sobre vigas de dimensiones conocidas, sometidas a varias cargas. La única sección que hay que considerar para el diseño es aquella en la que el momento flector es máximo, esto es, en el muro de apoyo. Por tanto, queremos diseñar una viga rectangular que resista un momento de 900.000 kg-cm con una tensión por flexión máxima de 1.400 kg/cm².

Como la sección ha de ser rectangular, debe tener el aspecto que aparece en el esquema de la izquierda, en el que se representa la anchura por b y la altura por $h = 2b$, de acuerdo con el enunciado. El momento de inercia respecto al eje neutro, que pasa por el centro de gravedad de la sección, está dado por

b

E.N.

h

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}b(2b)^3 = \frac{2}{3}b^4$$

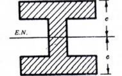
En la sección de la viga contigua al muro, la tensión está dada por $\sigma = My/I$. La tensión máxima en tracción tiene lugar en la cara superior de la viga, pues estas fibras se alargan ligeramente, y en esta cara $y = b$ y $\sigma = 1.400$ kg/cm², por lo que

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad \text{o} \quad 1.400 = \frac{900.000b}{\frac{2}{3}b^4}$$

de donde $b = 9,88$ cm, y $h = 2b = 19,76$ cm.

10. Elegir un perfil de ala ancha apropiado para soportar la carga en la viga en voladizo descrita en el Problema 9. La tensión de trabajo en tracción o compresión es de 1.400 kg/cm².

El diagrama de momentos flectores es, indudablemente, el mismo del Problema 9. El momento flector máximo tiene lugar en el muro de apoyo y es, como antes, de 900.000 kg-cm.



Para cualquier perfil de ala ancha, la tensión por flexión en una fibra situada a la distancia y del eje neutro de la sección está dada por $\sigma = My/I$. Se supone que la viga está colocada como en el dibujo adjunto. Las tensiones máximas se producen, evidentemente, cuando y adopta su mayor valor, lo que sucede en las fibras extremas de la viga. Representemos este valor máximo de y por v, esto es, v es la mitad de la altura de la sección. Por tanto, se pueden escribir las tensiones máximas en la forma

$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} = \frac{M}{I/v} = \frac{M}{W}$$

donde W es el módulo resistente de la viga.

De la última ecuación tenemos que $W = M/\sigma_{max}$, por lo que el módulo resistente de la sección está dado simplemente por el cociente del momento flector máximo y la tensión admisible de trabajo. Para la viga en voladizo considerada se convierte en

$$W = \frac{M}{\sigma} = \frac{900.000}{1.400} = 643 \text{ cm}^3$$

Por consiguiente, será aceptable una viga que tenga un módulo resistente de, al menos, 643 cm³. Indudablemente, sería extraño que un perfil comercial tenga exactamente este módulo resistente y se acostumbra a elegir uno que tenga o este valor de W, si es posible, o uno mayor. De esta forma, la tensión de trabajo no excederá del valor máximo admisible, de 1.400 kg/cm²

En la tabla abreviada de propiedades de perfiles de ala ancha, que aparece al final de este capítulo, se ve que puede servir el H 220. Tiene un módulo resistente de 732 cm³, que excede del valor necesario de 643 cm³. Es el perfil de ala ancha de menor peso que posee el módulo resistente necesario.

11. Una viga simplemente apoyada está sometida a las tres cargas aisladas representadas en la Fig. (*a*). La sección de la viga es circular y la tensión de trabajo admisible en tracción y compresión es de 1.400 kg/cm². Determinar el diámetro necesario.

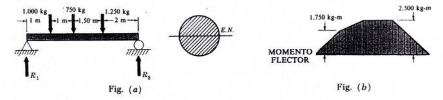


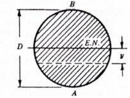
Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Esta carga se ha estudiado ya en el Problema 5 del Capítulo 6. Se halló, por la estática, que las reacciones eran R_1 = 1.750 kg y R_2 = 1.250 kg. El diagrama de momentos flectores consistía en una serie de rectas, como se muestra en la Figura (*b*).

Como es un problema de diseño, solo es necesario considerar la sección de la viga en que el momento flector es máximo. Del diagrama anterior resulta evidente que el valor máximo que alcanza el momento es de 2.500 kg-m y este valor tiene lugar en todos los puntos entre las cargas de 750 kg y de 1.250 kg. Por tanto, se trata de calcular una viga de sección circular que resista un momento flector de 2.500 kg-m, con una tensión de trabajo máxima admisible de 1.400 kg/cm².

Más abajo se muestra la sección de la viga. Como se ve por el sentido de las tres cargas aplicadas, las fibras inferiores de la viga están en tracción y las superiores en compresión. La máxima tracción se produce en

la fibra A, pues es la más alejada del eje neutro, mientras que la compresión máxima sucede en la fibra B.



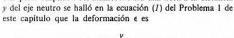
Para una fibra cualquiera a la distancia y del eje neutro, que pasa por el centro de gravedad del círculo, la tensión es $\sigma = My/I$. Para la fibra A, y tiene el valor $D/2$. En el Problema 11 del Capítulo 7 se vio que el momento de inercia de un círculo respecto a un diámetro es $I = \pi D^4/64$. Así, en el punto A de máxima tracción la tensión es de 1.400 kg/cm² y

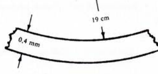
$$\sigma = \frac{My}{I} \quad \text{se transforma en} \quad 1.400 = \frac{250.000(D/2)}{\pi D^4/64} \quad \text{y} \quad D = 12{,}2 \text{ cm}$$

Considerando la compresión máxima se llegaría al mismo diámetro.

12. Si se ha enrollado un alambre de 0,4 mm de diámetro en una polea de 38 cm de diámetro, determinar la tensión máxima por flexión que se produce en el alambre. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

Como el radio de curvatura del alambre es constante e igual a 19 cm, de la ecuación (7) del Problema 1 de este capítulo que dice que $M = EI/\rho$ resulta evidente que el momento flector M debe ser constante en todos los puntos del alambre, por lo que éste actúa como una viga sometida a flexión pura. En el diagrama adjunto se muestra una parte ampliada del alambre. Para una fibra a la distancia y del eje neutro se halló en la ecuación (1) del Problema 1 de este capítulo que la deformación ϵ es





$$\epsilon = \frac{y}{\rho}$$

donde ρ representa el radio de curvatura de la viga en ese punto.

La deformación máxima tiene lugar en las fibras en que y adopta su mayor valor, que es $\frac{1}{2}(0{,}04)$ cm desde el eje neutro. El radio de curvatura es aproximadamente 19 cm. Con más exactitud, habría que medir este radio hasta la superficie neutra del alambre, pero en este caso el valor diferiría de 19 cm solamente en $\frac{1}{2}(0{,}04)$ cm, que puede despreciarse razonablemente.

Por tanto, la deformación máxima en las fibras exteriores del alambre es $\epsilon = \dfrac{\frac{1}{2}(0{,}04)}{19} = 0{,}00105$.

Las fibras longitudinales están sometidas a tensiones de tracción a un lado del alambre y de compresión en el otro, sin que actúe ninguna otra tensión. Para hallar su valor se puede utilizar la ley de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon = (2{,}1 \times 10^6)(0{,}00105) = 2.205 \text{ kg/cm}^2$$

13. Considerar la viga simplemente apoyada de la Fig. (a) sometida a una carga uniformemente variable con una intensidad máxima de p kg por metro lineal en el extremo derecho de la barra. Si la viga es un perfil de ala ancha H 200, determinar la máxima intensidad de carga p que se puede aplicar si las tensiones de trabajo son de 1.250 kg/cm² tanto en tracción como en compresión.

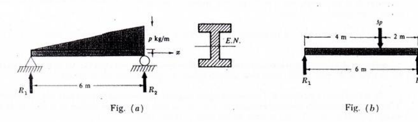


Fig. (a) Fig. (b)

Se pueden determinar fácilmente las reacciones R_1 y R_2 en función de la incógnita p, sustituyendo la carga repartida por su resultante. Como el valor medio de la carga repartida es de $p/2$ kg y actúa en una longitud de 6 m, la resultante es una fuerza de $6(p/2) = 3p$ kg que actúa en el centro de gravedad del diagrama triangular de carga, esto es, a 4 m a la derecha de R_1. Esta resultante aparece, pues, como en la Fig. (*b*). Por la estática, tenemos inmediatamente que $R_1 = p$ kg y $R_2 = 2p$ kg.

En el Problema 10 del Capítulo 6 se estudiaron los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector de este caso. Tomemos un eje x que coincida con la viga y que tenga su origen en el apoyo izquierdo. A la distancia x a la derecha de la reacción izquierda se halla, por triángulos semejantes, que la intensidad de carga es $(x/6)p$ kg/m. En la Fig. (*c*) aparece la parte de la viga cargada entre R_1 y la sección x. De acuerdo con el proceso explicado en

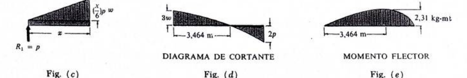


Fig. (*c*) Fig. (*d*) Fig. (*e*)

el Problema 10 del Capítulo 6, el esfuerzo cortante T en la sección a la distancia x del apoyo izquierdo está dado por

$$T = p - \frac{1}{2}(\frac{x}{6})p \cdot x = p - \frac{1}{12}p\,x^2$$

Esta ecuación es válida para todos los valores de x y con ella se traza fácilmente el diagrama de cortantes como puede verse en la Figura (*d*).

El punto de cortante nulo se halla haciendo

$$p - \frac{1}{12}p\,x^2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad x = \sqrt{12} = 3{,}464 \text{ m}$$

Es también el punto en que el momento flector adquiere su valor máximo.

El momento flector M en la sección a la distancia x del apoyo izquierdo está dado por

$$M = px - \frac{1}{2}(\frac{x}{6})px \cdot \frac{x}{3} = px - \frac{1}{36}px^3$$

También esta ecuación es válida para todos los valores de x y permite trazar el diagrama de momentos, como en la Fig. (*e*). En el punto de cortante nulo, $x = 3{,}464$ m, se halla sustituyendo este valor en la ecuación anterior, que el momento flector es

$$M_{x=3{,}47} = p(\sqrt{12}) - \frac{1}{36}p(\sqrt{12})^3 = \frac{2}{3}p\sqrt{12} = 2{,}31p \text{ kg-m} = 231p \text{ kg-cm}$$

Este es el momento máximo en la viga.

La tensión en una fibra a la distancia y del eje neutro de la viga está dada por $\sigma = My/I$. En la tabla al final de este capítulo se halla que el momento de inercia I es de 5.950 cm^4. La tensión máxima tiene lugar en las fibras inferiores de la viga, en las que $y = 10$ cm, en la sección en que el momento flector es máximo. Esta tensión es de 1.250 kg/cm^2 y, por tanto,

$$\sigma = My/I \quad \text{se transforma en} \quad 1.250 = \frac{(231p)(10)}{5.950} \quad \text{y} \quad p = 3.220 \text{ kg/m}$$

14. Considerar la viga con voladizo sometida a una carga uniformemente repartida de la Fig. (*a*) de la página siguiente. Se trata de un perfil H 120. ¿Cuál es la máxima tensión de flexión producida en la viga?

En el Problema 13 del Capítulo 6 se determinó ya el diagrama de momentos flectores para esta viga sometida a la carga uniformemente repartida representada, y se vio que tiene la forma que aparece en la Fig. (*b*). El momento máximo en la viga tiene el valor de 280 kg-m o 28.000 kg-cm.

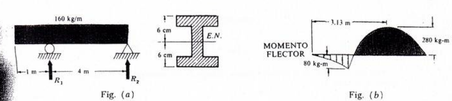


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

La tensión por flexión en cualquier fibra longitudinal a la distancia y del eje neutro, que pasa por el centro de gravedad de la sección, está dada por $\sigma = My/I$, donde M representa el momento flector en la sección considerada. En la tabla del final del capítulo se halla que el momento de inercia I respecto al eje por el centro de gravedad de la sección es, para esta viga, de 864 cm^4.

Por tanto, en la zona de máximo momento, $x = 3.125$ m, la tensión máxima tiene lugar en las fibras extremas de la viga, donde $y = 6$ cm y es

$$\sigma = My/I = 28.000(6)/864 = 194 \text{ kg/cm}^2$$

Por ser positivo el momento flector en esta sección sabemos que la barra será cóncava hacia arriba en ella, de acuerdo con el criterio de signos adoptado (véase el Capítulo 6); por tanto, en esta sección las fibras inferiores están sometidas a una tracción de 194 kg/cm^2 y las superiores a una compresión del mismo valor.

15. Determinar el módulo resistente de una viga de sección rectangular.

Sea h la altura de la viga y b su anchura. Se supone que se produce una flexión respecto al eje neutro por el centro de gravedad de la sección. El momento de inercia respecto al eje neutro es $I = bh^3/12$.

En las fibras extremas, la distancia al eje neutro es $h/2$ y se suele representar por v. Las tensiones máximas en estas fibras extremas están dadas por

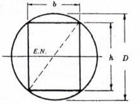
$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} = \frac{M}{I/v}$$

La relación I/v se llama módulo resistente y se representa habitualmente por W. Por tanto, $\sigma_{max} = M/W$. Para una viga rectangular,

$$W = \frac{I}{v} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

El módulo resistente tiene unidades (cm)^3.

16. Hay que cortar una viga de sección rectangular de un tronco circular de diámetro D. ¿Cuál será la relación entre la altura y la anchura de la viga para que tenga la máxima resistencia a la flexión pura?



A la derecha aparece un croquis de la sección de la viga, en el que h representa su altura y b la anchura.

Se considera que se produce la flexión respecto al eje neutro horizontal representado. Las tensiones máximas tienen lugar en las fibras extremas de la sección rectangular situadas a la distancia $h/2$ por debajo o por encima del eje neutro. Cualquier fibra a la distancia y del eje neutro está sometida a una tensión dada por $\sigma = My/I$, donde I representa el momento de inercia de la sección rectangular respecto al eje neutro, esto es, $bh^3/12$. En las fibras exteriores, $y = h/2$, y las tensiones máximas son

(1) $$\sigma_{max} = \frac{M(h/2)}{bh^3/12} = \frac{M}{bh^2/6}$$

Para un valor dado de la tensión máxima, se halla de esta ecuación que el máximo momento que se puede aplicar a la barra es

(2) $$M = \frac{1}{6}(\sigma_{max})bh^2$$

Para obtener resistencia máxima, esto es, momento M máximo, debe de serlo el producto bh^2, pues σ_{max} es constante para un material dado.

Para hacer máximo bh^2, comprobamos que puede expresarse en función de una variable independiente, por ejemplo, b, considerando la relación del triángulo rectángulo $b^2 + h^2 = D^2$:

$$bh^2 = b(D^2 - b^2) = bD^2 - b^3$$

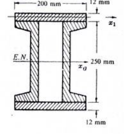
Hallando la primera derivada de la expresión de bh^2 respecto a b e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{d(bh^2)}{db} = \frac{d}{db}(bD^2 - b^3) = D^2 - 3b^2 = (b^2 + h^2) - 3b^2 = h^2 - 2b^2 = 0$$

Y despejando, $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$, que es la relación buscada para que la viga soporte un momento M máximo.

Hay que observar que la expresión que aparece en el denominador del segundo miembro de la ecuación (1), esto es, $bh^2/6$, es el módulo resistente de una barra rectangular, por lo que realmente es este módulo el que debe hacerse máximo para que la viga tenga la mayor resistencia.

17. Dos placas de 12 × 200 mm están soldadas a dos U de 250 mm de altura que pesan 34 kg por metro lineal, para formar la sección de viga de la figura. Las cargas están en un plano vertical y la flexión se produce respecto a un eje horizontal. Si la tensión máxima admisible es de 1.250 kg/cm², determinar el momento flector máximo que puede soportar la viga. El momento de inercia de cada U respecto a un eje horizontal por el centro de gravedad es de 3.770 cm⁴.



Primero necesitamos calcular el momento de inercia de la sección total de la viga respecto al eje neutro horizontal por el centro de gravedad, expresado por x_G. El momento de inercia de cada placa de ala respecto al eje neutro x_G es igual al correspondiente al eje horizontal x_1 que pasa por el centro de gravedad de la placa, más el producto de su área por el cuadrado de la distancia entre x_1 y x_G. Por tanto, para cada placa, el momento de inercia respecto al eje neutro es

$$I_1 = \frac{1}{12}(20)(1,2)^3 + 20(1,2)(13,1)^2 = 4.121 \text{ cm}^4$$

El momento de inercia de cada U respecto al eje x_G es de 3.770 cm⁴. Por consiguiente, para toda la sección se halla que el momento de inercia respecto al eje neutro es de

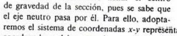
$$I = 2(3.770) + 2(4.121) = 15.782 \text{ cm}^4$$

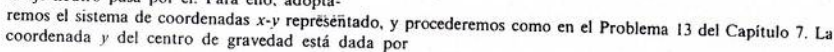
La tensión máxima se produce en la viga en las fibras extremas de las placas de ala y está dada por $\sigma = Mv/I$, donde I representa el momento de inercia de toda la sección respecto al eje neutro y v la distancia hasta las fibras extremas de las placas, esto es, 13,7 cm. Si la tensión máxima en estas fibras es de 1.250 kg/cm²,

$$\sigma = Mv/I \quad \text{se transforma en} \quad 1.250 = \frac{M(13,7)}{15.782} \quad \text{y} \quad M = 1.440.000 \text{ kg-cm}$$

Este es el máximo momento flector al que puede someterse a la viga sin que exceda la tensión de 1.250 kg/cm².

18. Una viga está sometida a un par en cada extremo, como se muestra en la figura, siendo la magnitud de cada par de 50.000 kg-cm. La viga es de acero y de sección T, con las dimensiones indicadas. Determinar (*a*) la tensión de tracción máxima en la viga y su situación y (*b*) la tensión de compresión máxima y su situación.





Primero necesitamos hallar el centro de gravedad de la sección, pues se sabe que el eje neutro pasa por él. Para ello, adoptaremos el sistema de coordenadas *x-y* representado, y procederemos como en el Problema 13 del Capítulo 7. La coordenada *y* del centro de gravedad está dada por

$$\bar{y} = \frac{\int y\, da}{A}$$

donde el numerador del segundo miembro representa el momento estático del área respecto al eje *x*. Se puede considerar que la sección T consta de los tres rectángulos indicados con líneas de trazos, con lo que esta expresión resulta:

$$\bar{y} = \frac{10(2)(5) + [4(2)(1)]2}{10(2) + [4(2)]2} = 3{,}22 \text{ cm}$$

Por tanto, el centro de gravedad está situado 3,22 cm encima del eje *x*. El eje horizontal que pasa por este punto se ha representado por x_G.

El momento de inercia respecto al eje *x* está dado por la suma de los momentos de inercia respecto a este mismo eje de cada uno de los tres rectángulos componentes de la sección. Así, pues,

$$I_x = \frac{1}{3}(4)(2)^3 + \frac{1}{3}(2)(10)^3 + \frac{1}{3}(4)(2)^3 = 688 \text{ cm}^4$$

Ahora puede hallarse ya el momento de inercia respecto al eje x_G utilizando el teorema de los ejes paralelos. Así,

$$I_x = I_G + A\bar{y}^2, \qquad 688 = I_{xG} + 36(3{,}22)^2 \quad \text{y} \quad I_{xG} = 315 \text{ cm}^4$$

Evidentemente, para las cargas representadas, las fibras por debajo del eje x_G están en tracción, mientras que las situadas encima de ese eje están en compresión. Sean v_1 y v_2 las distancias de las fibras extremas al eje neutro (x_G), como se indica en la figura. Indudablemente, $v_1 = 3{,}22$ cm y $v_2 = 6{,}78$ cm. La tensión de tracción máxima se produce en las fibras situadas en *B-B* y está dada por $\sigma = Mv_1/I$, donde I representa el momento de inercia de toda la sección respecto al eje neutro que pasa por su centro de gravedad. Así, la tensión de tracción máxima está dada por

$$\sigma = Mv_1/I = 50.000(3{,}22)/315 = 511 \text{ kg/cm}^2$$

La máxima tensión de compresión tiene lugar en las fibras de *A-A* y está dada por $\sigma = Mv_2/I$. Para conseguir un sistema de signos apropiados es conveniente asignar un valor negativo a v_2, pues está al lado opuesto que v_1 respecto al eje x_G. Así,

$$\sigma = Mv_2/I = 50.000(-6{,}78)/315 = -1.076 \text{ kg/cm}^2$$

El signo negativo indica que esta tensión es de compresión.

19. Una viga simplemente apoyada está sometida al par de 250 kg-m representado en la Fig. (*a*). Se trata de un perfil U de las dimensiones indicadas. Determinar las tensiones máximas de tracción y de compresión en la viga.

En el Problema 9 del Capítulo 6 se determinó el diagrama de momentos flectores de este caso particular, que tiene el aspecto de la Figura (*b*).

Ahora es necesario situar el centro de gravedad de la sección, pues el eje neutro pasa por él, lo que ya se hizo

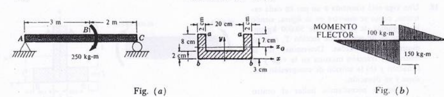


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

en el Problema 15 del Capítulo 7, donde se halló que está 3 cm encima del eje x, por lo que x_G por el centro de gravedad está 3 cm por encima de dicho eje x. En este mismo problema se halló que el momento de inercia de toda la sección respecto al eje x_G es de 667 cm^4.

En este problema es necesario distinguir entre momentos flectores positivos y negativos. Un método para conseguirlo es considerar una sección de la viga ligeramente a la izquierda del punto B en que está aplicado el par de 250 kg-m. De acuerdo con el diagrama, el momento allí es de -150 kg-m y, según el criterio de signos adoptado en el Capítulo 6 como es negativo, la viga en este punto tiene la concavidad hacia abajo, como se ve a la derecha. Por tanto, las fibras superiores están en tracción y las inferiores en compresión. En las fibras superiores *a-a*, la tensión está dada por $\sigma = My/I$, por lo que

$$\sigma_a = 15.000(7)/667 = 157 \text{ kg/cm}^2$$

En las fibras inferiores *b-b* se debe tomar el valor de y de la fórmula anterior de la tensión, como negativo, pues estas fibras están situadas al otro lado del eje neutro, y tenemos

$$\sigma_b = 15.000(-3)/667 = -67 \text{ kg/cm}^2$$

Ahora tenemos que estudiar las tensiones en una sección inmediatamente a la derecha del punto B. En ella el momento es de 100 kg-m y, de acuerdo con el criterio de signos habitual, la viga tiene en esta sección la concavidad hacia arriba, como se ve a la derecha. Aquí, las fibras superiores están en compresión y las inferiores en tracción. En las fibras superiores *a-a*, la tensión es

$$\sigma_a' = 10.000(-7)/667 = -105 \text{ kg/cm}^2$$

En las fibras inferiores *b-b* tenemos,

$$\sigma_b' = 10.000(-3)/667 = 45 \text{ kg/cm}^2$$

De los cuatro valores anteriores se puede ya escoger las tensiones máximas de compresión y de tracción. Evidentemente, la tracción máxima es de 157 kg/cm^2 en las fibras superiores inmediatamente a la izquierda del punto B y la compresión máxima de 105 kg/cm^2 en las fibras superiores también, pero inmediatamente a la derecha del punto B.

20. Considerar la viga con extremos en voladizo, cargada con tres fuerzas aisladas, representada en la Fig. (*a*). La viga está simplemente apoyada y es de sección T, colocada como se indica. El material es fundición gris con una tensión de trabajo admisible en tracción de 350 kg/cm^2 y en compresión de 1.400 kg/cm^2. Determinar el máximo valor admisible de P.

Por simetría, cada una de las reacciones, representadas por R, es igual a $P/2$. En el Problema 12 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de momentos flectores de este tipo de carga. Como se vio, consta de una serie de

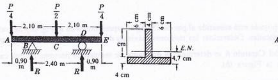


Fig. (*a*)



Fig. (*b*)

rectas que unen las ordenadas que representan los momentos flectores en los puntos A, B, C, D y E. En B, el momento está dado por el de la fuerza $P/4$ que actúa en A respecto a un eje por B. Así,

$$M_B = -(P/4)(0{,}90) = -0{,}90P/4 \text{ kg-m}$$

En C, el momento flector está dado por la suma de los momentos de las fuerzas $P/4$ y $R = P/2$ respecto a un eje por C. Así, pues,

$$M_C = -(P/4)(2{,}10) + (P/2)(1{,}20) = 0{,}30P/4 \text{ kg-m}$$

El momento flector en D es igual al de B por simetría, y en cada uno de los extremos A y E es nulo. Por tanto, el diagrama de momentos flectores es como en la Fig. (*b*) anterior.

Las características de la sección T que necesitamos aquí han sido halladas ya en el Problema 13 del Capítulo 7, en el que se vio que la distancia de las fibras extremas del ala al centro de gravedad era de 4,7 cm y el momento de inercia respecto al eje neutro que pasa por dicho centro, de 1.617 cm^4.

Probablemente, lo más sencillo es calcular cuatro valores de P basados en las diversas tensiones máximas de tracción y compresión que pueden existir en los puntos B y C y elegir luego el menor de esos valores. Examinemos primero el punto B. Como el momento flector en él es negativo, la viga tiene la concavidad hacia abajo, como se ve en el esquema adjunto. Evidentemente, las fibras superiores están sometidas a tracción y las inferiores a compresión. Calcularemos primero un valor de P suponiendo que en las fibras superiores existe la tensión de tracción admisible de 350 kg/cm^2. Aplicando la fórmula de la flexión $\sigma = My/I$ a esas fibras, hallamos

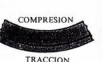


$$350 = (0{,}90P/4)(100)(9{,}3)/1.617 \quad \text{y} \quad P = 2.700 \text{ kg}$$

A continuación calcularemos un valor de P, suponiendo que en las fibras inferiores existe la tensión de compresión admisible de 1.400 kg/cm^2. Aplicando la misma fórmula, tenemos

$$1.400 = (0{,}90P/4)(100)(4{,}7)/1.617 \quad \text{y} \quad P = 21.400 \text{ kg}$$

Examinemos ahora el punto C. Como el momento flector es aquí positivo, la viga presenta la concavidad hacia arriba y tiene la forma que aparece en el diagrama adjunto. Aquí, las fibras superiores están sometidas a compresión y las inferiores a tracción. Calcularemos primero un valor de P suponiendo que en las fibras inferiores se produce la tensión admisible de 350 kg/cm^2. Aplicando la correspondiente fórmula,



$$350 = (0{,}30P/4)(100)(4{,}7)/1.617 \quad \text{y} \quad P = 16.050 \text{ kg}$$

Finalmente, suponiendo que en las fibras superiores existe la compresión admisible de 1.400 kg/cm^2, tenemos

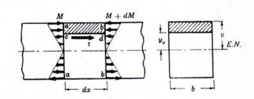
$$1.400 = (0{,}30P/4)(100)(9{,}3)/1.617 \quad \text{y} \quad P = 32.450 \text{ kg}$$

El menor de estos cuatro valores es $P = 2.700$ kg. Por tanto, el factor determinante para hallar la carga máxima admisible es la tensión de tracción en los puntos B y D.

21. En el caso de una viga cargada con fuerzas transversales que actúan perpendicularmente a su eje, no solo se producen tensiones por flexión paralelas al eje de la barra, sino también tensiones de cortante en cada sección de la viga perpendicular a su eje. Deducir una expresión de la intensidad de estas tensiones cortantes en función del esfuerzo cortante en la sección y de las características de la misma.

La teoría a desarrollar se aplica solamente a secciones de forma rectangular. Sin embargo, los resultados se usan frecuentemente para hallar valores aproximados de las tensiones cortantes en otras secciones que tengan un plano de simetría.

Consideremos que de una viga se corta un elemento de longitud dx, como el representado en la figura adjunta. Representaremos el momento flector a la izquierda del elemento por M y el de la derecha por $(M + dM)$, pues generalmente el momento varía ligeramente al pasar de una sección de la viga a la inmediata. Si se mide y hacia arriba desde el eje neutro, la tensión por flexión en la sección izquierda a-a está dada por



$$\sigma = \frac{My}{I}$$

donde I representa el momento de inercia de toda la sección respecto al eje neutro. Más arriba se representa la distribución de tensiones. Del mismo modo, la tensión por flexión en la sección derecha b-b es

$$\sigma' = \frac{(M + dM)y}{I}$$

Consideremos ahora el equilibrio del elemento sombreado *acdba*. La fuerza que actúa en una superficie dA de la cara ac no es más que el producto de la intensidad de la fuerza por la superficie, por lo que

$$\sigma\, da = \frac{My}{I} d\,A$$

Por integración, se halla que la suma de todas estas fuerzas que actúan sobre la cara izquierda ac es

$$\int_{y_0}^{v} \frac{My}{I}\, dA$$

De igual modo, la suma de todas las fuerzas normales a la cara derecha db está dada por

$$\int_{y_0}^{v} \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

Evidentemente, como estas dos integrales son desiguales, debe actuar en el elemento sombreado alguna otra fuerza para mantener el equilibrio. Como se supone que la cara superior ab está libre de fuerzas exteriores aplicadas horizontales, la única posibilidad que queda es la existencia de un esfuerzo cortante horizontal en la cara inferior cd. Representa la acción de la parte inferior de viga sobre el elemento sombreado. Representemos, como en la figura, la tensión cortante en esta cara por τ y por b la anchura de la viga en el punto en que actúa τ. El esfuerzo cortante horizontal en la cara cd es

$$\tau\, b\, dx$$

Para que el elemento *acdba* esté en equilibrio será

$$\Sigma F_h = \int_{y_0}^{v} \frac{My}{I} da - \int_{y_0}^{v} \frac{(M + dM)y}{I} dA + \tau\, b\, dx = 0$$

Y despejando,

$$\tau = \frac{1}{Ib} \cdot \frac{dM}{dx} \int_{y_0}^{v} y\, dA$$

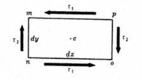
Pero, por el Problema 7 del Capitulo 6, tenemos que $T = dM/dx$, donde T representa el esfuerzo cortante (en kilos) en la sección a-a. Sustituyendo,

$$\tau = \frac{T}{Ib} \int_{y_0}^{v} y\, dA$$

La integral de esta última ecuación representa el momento estático del área sombreada respecto al eje neutro de la viga. Este área es siempre la parte de la sección que está por encima del nivel al que actúa la tensión cortante buscada. A veces se representa el momento estático por Q, en cuyo caso la fórmula anterior se convierte en

$$\tau = \frac{TQ}{Ib}$$

Las unidades de $\int y\, da$ o de Q, son cm^3.



La tensión cortante τ que acabamos de determinar actúa horizontalmente, como se ha visto anteriormente. Pero, consideremos el equilibrio de un elemento delgado *mnop* de espesor t cortado de un cuerpo y sometido a una tensión cortante τ_1 en su cara inferior, como puede verse en el diagrama adjunto. La fuerza horizontal total en la cara inferior es $\tau_1\, t\, dx$. Para que exista equilibrio de fuerzas en sentido horizontal, sobre la cara superior debe actuar una fuerza igual y de sentido contrario, por lo que allí también es τ_1 la intensidad de la tensión cortante. Esas dos fuerzas dan origen a un par de magnitud $\tau_1\, t\, dx\, dy$. El único modo en que se puede mantener el equilibrio es por medio de otro par que actúe en las caras verticales. Si expresamos por τ_2 la tensión cortante en estas caras, la fuerza total en cada cara vertical es $\tau_2\, t\, dy$. Para el equilibrio de momentos respecto al centro del elemento, debemos tener

$$\Sigma M_C = \tau_1\, t\, dx\, dy - \tau_2\, t\, dy\, dx = 0 \qquad \text{o} \qquad \tau_1 = \tau_2$$

Hemos llegado a la interesante conclusión de que las tensiones cortantes en dos planos perpendiculares cualesquiera por un punto son iguales. Por consiguiente, no solo actúan esas tensiones cortantes τ horizontalmente en un punto de la viga, sino que también actúan en el mismo punto tensiones cortantes de igual intensidad, verticalmente.

En resumen, cuando una viga está sometida a fuerzas transversales se producen en ella tensiones cortantes horizontales y verticales. Las verticales son de tal magnitud que su resultante en una sección cualquiera es igual al esfuerzo cortante T en esa sección.

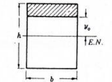
Utilizando la expresión de la tensión cortante deducida en el Problema 21, determinar su distribución en una viga de sección rectangular. ¿Cuál es la tensión cortante máxima en una barra rectangular?

En el Problema 21 se halló que la tensión cortante τ a la distancia y_0 del eje neutro es

$$\tau = \frac{T}{Ib}\int_{y_0}^{v} y\, dA$$

donde T representa el esfuerzo cortante en la sección y b la anchura de la viga en la posición en que actúa τ.

Es necesario calcular la integral anterior para una sección rectangular. Sea h la altura de la sección y b su anchura, como se indica en el diagrama adjunto.



La integral representa el momento estático del área rayada respecto al eje neutro. Hay que observar que está área va desde el nivel en que actúa la tensión τ buscada hasta las fibras extremas de la viga. De este modo hallamos la tensión cortante τ en todas las fibras a la distancia y_0 del eje neutro, pero no es necesario integrar en un caso tan sencillo: Como se sabe que la integral representa el momento estático del área rayada respecto al eje neutro, podemos calcular este momento de acuerdo con la definición dada en el Capítulo 7, esto es, hallando simplemente el producto del área por la distancia de su centro de gravedad al eje neutro.

El área está dada por $b(h/2 - y_0)$, y la distancia desde el centro de gravedad de la zona rayada al eje neutro es $\frac{1}{2}(h/2 + y_0)$, por lo que el valor de la integral que representa el momento estático del área es

$$\int_{y_0}^{v} y\, da = \frac{1}{2}b\left(\frac{h}{2} + y_0\right)\left(\frac{h}{2} - y_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)b$$

y la tensión cortante τ a la distancia y_0 del eje neutro tiene el valor

$$\tau = \frac{T}{Ib}\left[\frac{1}{2}b\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)\right] = \frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

De esta expresión puede verse que la tensión cortante varía en la sección de forma parabólica desde un máximo en el eje neutro ($y_0 = 0$) hasta cero en las fibras extremas de la viga ($y_0 = h/2$). Esta variación tiene la representación que figura en el gráfico adjunto.

En el eje neutro, $y_0 = 0$, sustituyendo se halla que la tensión cortante máxima es

$$(\tau)_{max} = Th^2/8I$$

Pero para la sección rectangular, $I = bh^3/12$, y sustituyendo

$$(\tau)_{max} = \frac{Th^2}{8(bh^3/12)} = \frac{3}{2}\left(\frac{T}{bh}\right)$$

Por tanto, la tensión cortante máxima en el caso de sección rectangular es el 50 % mayor que la tensión media obtenida dividiendo el esfuerzo cortante T por la sección bh.

23. Una viga tiene sección rectangular de 15 cm de anchura y 20 cm de altura y está sometida a un sistema de fuerzas transversales que da origen a un esfuerzo cortante vertical máximo de 2.000 kg. Determinar la tensión cortante máxima en la viga.

En el Problema 22 se vio que la tensión cortante máxima en una viga de sección rectangular es el 50 % mayor que su valor medio. La tensión cortante media en la sección en que el esfuerzo cortante es de 2.000 kg se obtiene dividiendo este valor por el área de la sección que es de 300 cm², lo que da

$$(\tau)_m = 2.000/300 = 6{,}66 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión cortante máxima se produce en el eje neutro de la viga y es

$$(\tau)_{max} = (3/2)(6{,}66) = 10 \text{ kg/cm}^2$$

24. Una viga de sección rectangular está simplemente apoyada en sus extremos y sometida a la fuerza aislada representada en la Fig. (*a*). Determinar la tensión cortante máxima en la viga y el valor de dicha tensión en un punto 2,50 cm por debajo de la cara superior, en una sección 50 cm a la derecha de la reacción izquierda.

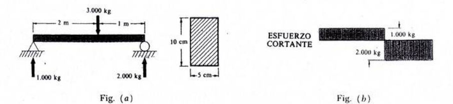


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Por la estática se halla fácilmente que las reacciones son 1.000 kg y 2.000 kg, como se ha representado. En el Problema 4 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de esfuerzos cortantes de este tipo de carga. Para esta viga tiene el aspecto de la Figura (*b*).

La observación del diagrama anterior revela que el máximo valor del esfuerzo cortante es de 2.000 kg y tiene lugar en todas las secciones a la derecha de la carga de 3.000 kg. El valor medio de las tensiones cortantes que actúan en cualquier sección de esta zona no es más que el esfuerzo cortante dividido por el área de la sección, esto es,

$$(\tau)_m = 2.000/5(10) = 40 \text{ kg/cm}^2$$

Según el Problema 22, la tensión cortante máxima es 50 % mayor que el valor medio, por lo que

$$(\tau)_{max} = (3/2)(40) = 60 \text{ kg/cm}^2$$

Esta tensión cortante máxima se produce en todos los puntos del eje neutro de la viga a la derecha de la carga de 3.000 kg.

Según el diagrama, el esfuerzo cortante que actúa en una sección a 50 cm a la derecha de la reacción izquierda es de 1.000 kg. La tensión cortante τ en un punto de esta sección, a la distancia y_0 del eje neutro, es, según se vio en el Problema 22,

$$\tau = \frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

En un punto a 2,5 cm por debajo de las fibras superiores de la viga, $y_0 = 2{,}5$ cm, y además $h = 10$ cm e $I = bh^3/12 = 5(10)^3/12 = 416{,}7 \text{ cm}^4$. Sustituyendo,

$$\tau = \frac{1.000}{2(416{,}7)}\left(\frac{100}{4} - 6{,}25\right) = 22{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

25. Una viga de madera simplemente apoyada, de sección rectangular, está cargada como se ve en la Fig. (*a*). Determinar la magnitud y posición de la tensión cortante máxima en la viga, así como la máxima tensión por flexión.

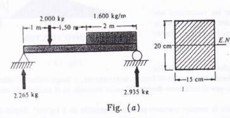


Fig. (*a*)

2.265 kg
265 kg
2.935 kg
ESFUERZO CORTANTE

2.66 m
2.700 kg-m
MOMENTO FLECTOR

Fig. (*b*)

En el Problema 8 del Capítulo 6 se determinaron los diagramas de esfuerzo cortante y de momentos flectores de esta viga, hallándose que tenían el aspecto representado en la Figura (*b*).

La observación del diagrama de cortantes revela que el esfuerzo máximo T es de 2.935 kg contiguo al apoyo derecho. La tensión cortante media en la sección inmediatamente a la izquierda del apoyo es

$$(\tau)_m = 2.935/15(20) = 9{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

Como la tensión cortante máxima en una viga de sección rectangular es el 50 % mayor que el valor medio,

$$(\tau)_{max} = (3/2)(9{,}8) = 14{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión cortante máxima en la viga es de 14,7 kg/cm², y tiene lugar en el eje neutro inmediatamente a la izquierda del apoyo derecho.

El diagrama del momento flector revela que el mayor momento en la viga es de 2.700 kg-m o 270.000 kg-cm. La tensión por flexión máxima se produce en las fibras extremas de la viga en esta sección de máximo momento y está dada por

$$\sigma = Mv/I$$

Aquí, $v = 10$ cm, esto es, la distancia del eje neutro a las fibras extremas. Además, $I = 15(20)^3/12 = 10.000 \text{ cm}^4$, por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{max} = 270.000(10)/10.000 = 270 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión por flexión máxima es de 270 kg/cm² y tiene lugar en las fibras extremas de la viga en la sección 2,66 m a la derecha de la reacción izquierda. La tensión es de tracción en la cara inferior y de compresión en la superior.

26. Una viga de madera simplemente apoyada, de sección rectangular, está cargada con una fuerza aislada P, como se ve en la Fig. (a). La tensión máxima admisible en flexión es de 140 kg/cm² y la tensión cortante horizontal, de 8 kg/cm². Determinar el mayor valor que puede tener la carga P.

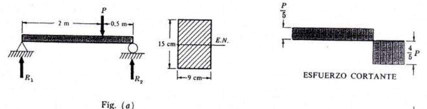


Fig. (a)



Fig. (b)

Por la estática se halla fácilmente que las reacciones son $R_1 = P/5$ y $R_2 = 4P/5$. En el Problema 4 del Capítulo 6 se estudiaron los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector de este tipo de carga. En este caso particular son los de la Figura (b).

Probablemente, lo más sencillo es estudiar el mayor valor que puede adoptar P, suponiendo que el esfuerzo cortante es el factor determinante, y luego hallar el valor máximo de P suponiendo que viene determinado por el momento flector. El valor buscado es el mínimo de esos dos valores.

Supongamos primero que en la viga existe la tensión cortante máxima admisible de 8 kg/cm². Según el diagrama, el máximo esfuerzo cortante T es $4P/5$. La tensión cortante máxima se produce en el eje neutro en todas las secciones a la derecha de la carga P, y se halló en el Problema 22 que es

$$(\tau)_{max} = \frac{3T}{2bh}$$

donde b y h representan la anchura y la altura de la viga, respectivamente. Sustituyendo,

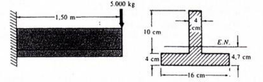
$$8 = \frac{3(4P/5)}{2(9)(15)} \quad \text{y} \quad P = 900 \text{ kg}$$

Ahora supondremos que en la viga existe la tensión por flexión admisible de 140 kg/cm². La tensión máxima tiene lugar en las fibras extremas superiores e inferiores de la viga inmediatamente bajo la carga, pues el momento flector es máximo allí. Del diagrama de momentos flectores se ve que este momento máximo vale $2P/5$ kg-m o $200P/5$ kg-cm. La tensión máxima está dada por $\sigma = Mv/I$, donde $v = 7{,}5$ cm representa la distancia desde el eje neutro hasta las fibras extremas de la viga. En la cara inferior, las fibras están en tracción y si allí existe la tensión admisible de 140 kg/cm², tenemos

$$140 = \frac{(200P/5)(7{,}5)}{9(15)^3/12} \quad \text{y} \quad P = 1.180 \text{ kg}$$

Por tanto, el máximo valor que puede tener P es el menor de estos dos valores, o sea, 900 kg. Así, pues, la tensión cortante determina la carga admisible máxima.

27. Considerar la viga en voladizo sometida a la carga aislada representada en el esquema de abajo. La sección es de forma de T. Determinar la tensión cortante a 2 cm de la cara superior en una sección inmediata al muro de apoyo y el valor máximo de esta tensión en la viga.



En el Problema 1 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de esfuerzos cortantes de este tipo de carga. El cortante tiene un valor constante de 4.000 kg en todos los puntos de la viga, por lo que no es necesario dibujar el diagrama.

Además, en el Problema 13 del Capítulo 7 se halló la situación del centro de gravedad y el momento de inercia respecto al eje por dicho centro de gravedad de esta sección particular. Se vio que el centro estaba 4,7 cm por encima de la cara inferior de la viga y que el momento de inercia respecto al eje horizontal por el centro de gravedad es de 1.617 cm^4.

La tensión cortante a la distancia y_0 del eje neutro por el centro de gravedad es, según se vio en el Problema 21,

$$\tau = \frac{T}{Ib}\int_{y_0}^{v} y\,dA$$

Observando esta ecuación, vemos que la tensión cortante es máxima en el eje neutro, pues en ese punto $y_0 = 0$ y la integral adopta el mayor valor posible. Sin embargo, no es necesario integrar, pues se sabe que en este caso la integral representa el momento estático del área situada entre el eje neutro y las fibras extremas de la viga respecto a dicho eje neutro. Esta área está representada por la zona rayada a la derecha. También podría hallarse, indudablemente, el valor de la integral tomando el momento estático del área sin rayar bajo el eje neutro, respecto a esta línea, pero el cálculo sería algo más difícil.

Por tanto, el momento estático del área rayada respecto al eje neutro es

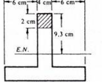
$$4(9{,}3)(4{,}65) = 173 \ \text{cm}^3$$

y sustituyendo en la fórmula general anterior, se halla que la tensión cortante en el eje neutro, donde $b = 4$ cm, es

$$\tau = \frac{4.000}{1.617(4)}(173) = 107 \ \text{kg/cm}^2$$

En esta fórmula se ha tomado b igual a 4 cm, pues ésa es la anchura de la viga en el punto en que se calculó la tensión cortante. Por consiguiente, el valor máximo de esa tensión es de 107 kg/cm^2 y tiene lugar en todos los puntos del eje neutro en toda la longitud de la viga, pues el esfuerzo cortante es constante en toda ella.

La tensión cortante a 2 cm de la cara superior de la viga está dada también por la fórmula



$$\tau = \frac{T}{Ib}\int_{y_0}^{v} y\,dA$$

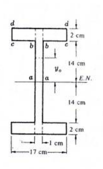
Pero la integral representa el momento estático de la nueva área rayada, representada a la derecha, respecto al eje neutro. Tampoco es necesario en este caso integrar, pues se conoce la coordenada del centro de gravedad de esta área sombreada, que es de 8,3 cm sobre el eje neutro. Así, pues, el momento estático que buscamos es $4(2)(8{,}3) = 66{,}4$ cm^3, y la tensión cortante 2 cm por debajo de las fibras superiores.

$$\tau = \frac{4.000}{1.617(4)}(66{,}4) = 41 \ \text{kg/cm}^2$$

También ahora se ha tomado $b = 4$ cm, pues ésta es la anchura de la viga en el punto en que se ha calculado la tensión cortante. Como el esfuerzo cortante es igual a 4.000 kg en toda la viga, la tensión cortante 2 cm debajo de las fibras superiores es de 41 kg/cm^2 en cualquier punto de la viga.

28. Considerar una viga con la sección doble T representada en la figura de la página siguiente. En la sección actúa

un esfuerzo cortante de 14.000 kg. Determinar los valores máximo y mínimo de la tensión cortante en el alma.



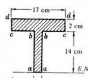
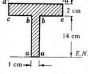
La tensión cortante en un punto cualquiera de la sección está dada por

$$\tau = \frac{T}{Ib}\int_{y_0}^{v} y\, dA$$

como se dedujo en el Problema 21. Aquí, y_0 representa la posición del punto en que actúa τ y se mide desde el eje neutro, como se ve en la figura, e I es el momento de inercia de toda la sección respecto al eje neutro que pasa por el centro de gravedad de la misma. I se calcula fácilmente dividiendo la sección en rectángulos, como se indica por las líneas de trazos; tendremos:

$$I = \frac{1}{12}(1)(32)^3 + 2[\frac{1}{12}(16)(2)^3 + (16)(2)(15)^2] = 17.152 \text{ cm}^4$$

De la fórmula vemos que la tensión cortante tiene un valor máximo cuando $y_0 = 0$, esto es, en el eje neutro, pues en él adopta la integral su mayor valor posible. Para hallar el valor de $\int_{y_0}^{v} y\, dA$ no es necesario integrar, pues se sabe que representa el momento de inercia del área entre $y_0 = 0$ (esto es, el eje neutro) y las fibras extremas de la viga. En el diagrama adjunto aparece rayada esta área. Tomando el momento estático respecto al eje neutro,

$$\int_0^{16} y\, dA = 14(1)(7) + 17(2)(15) = 608 \text{ cm}^3$$

Por consiguiente, la tensión cortante máxima en el alma se produce en la sección *a-a* a lo largo del eje neutro y, sustituyendo en la fórmula general, se halla que es

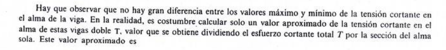
$$(\tau)_{max} = \frac{14.000}{(17.152)(1)}(608) = 496 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión cortante mínima en el alma tiene lugar en el punto más alejado del eje neutro, esto es, en la sección *b-b*. Para calcular su valor allí hay que hallar $\int_{y_0}^{v} y\, dA$ para el área entre *b-b* y las fibras extremas de la viga, que es la rayada en el esquema adjunto. Tampoco es necesario integrar, pues esta integral no es más que el momento estático de esta área sombreada respecto al eje neutro. Es

$$\int_{14}^{16} y\, dA = (17)(2)(15) = 510 \text{ cm}^3$$

El valor de b es también 1 cm, pues ésta es la anchura de la viga en la posición en que se calcula la tensión cortante. Sustituyendo en la forma general

$$(\tau)_{max} = \frac{14.000}{(17.152)(1)}(510) = 416 \text{ kg/cm}^2$$



Hay que observar que no hay gran diferencia entre los valores máximo y mínimo de la tensión cortante en el alma de la viga. En la realidad, es costumbre calcular solo un valor aproximado de la tensión cortante en el alma de estas vigas doble T, valor que se obtiene dividiendo el esfuerzo cortante total T por la sección del alma sola. Este valor aproximado es

$$(\tau)_{max} = \frac{14.000}{32(1)} = 437 \text{ kg/cm}^2$$

Un estudio más detallado de las tensiones cortantes en una viga doble T pone de manifiesto que el alma resiste casi todo el esfuerzo cortante T y las alas solamente resisten una pequeña parte de este esfuerzo. Varios códigos especifican la tensión cortante máxima en el alma de una viga doble T, dando valores bastante bajos. Así, algunos indican 700 kg/cm² y otros 900 kg/cm².

PROBLEMAS PROPUESTOS

29. Una viga de ciprés tiene una sección de 10 cm × 20 cm y flexa según un eje paralelo a la cara de 10 cm. Si la tensión máxima producida es de 500 kg/cm². determinar el momento flector máximo. *Sol.* 3.333 kg-m

30. Una viga en voladizo de 2,70 m de longitud soporta una carga aislada de 4.000 kg en su extremo libre. El material es acero de estructuras y la tensión máxima por flexión no debe exceder de 1.250 kg/cm². Determinar el diámetro necesario si la barra ha de ser circular. *Sol.* 20,7 cm

31. Una viga de roble de 4 m de longitud está simplemente apoyada en los extremos y cargada en el centro con una fuerza aislada de 700 kg. El límite de proporcionalidad de la madera es de 550 kg/cm² y es suficiente un coeficiente de seguridad de 4. Determinar la sección de la viga si (*a*) ha de ser cuadrada y (*b*) si la altura debe ser $1\frac{1}{2}$ veces la anchura. *Sol.* (*a*) 14,5 cm, (*b*) 11,1 cm × 16,6 cm

32. Una viga de pino simplemente apoyada tiene 3 m de longitud y soporta una carga uniformemente repartida de 40 kg por metro lineal. La tensión máxima por flexión no debe exceder de 105 kg/cm². Si la altura de la viga debe ser $1\frac{1}{4}$ veces la anchura, determinar la sección necesaria. *Sol.* 5,48 cm × 6,85 cm

33. Se emplea un perfil H 160 (para las características, véase tabla al final del capítulo) como viga en voladizo. Tiene te de seguridad de 4. Determinar la sección de la viga si (*a*) ha de ser cuadrada y (*b*) si la altura debe ser $1\frac{1}{2}$ veces la anchura. *Sol.* (*a*) 14,5 cm, (*b*) 11,1 cm × 16,6 cm

34. Una viga de acero de 1,50 m de longitud está simplemente apoyada en cada extremo y soporta una carga aislada de 10.000 kg a 60 cm de uno de los apoyos. Determinar las tensiones máximas que se producen por flexión en la viga si es de sección rectangular de 10 cm de anchura y 15 cm de altura. *Sol.* 960 kg/cm²

35. Determinar las tensiones por flexión máximas para una barra cargada como en el problema anterior si la viga es un perfil H 180. *Sol.* 845 kg/cm²

36. Se ha arqueado una banda de acero de 1 mm de grueso para formar un arco de círculo de 70 cm de radio. Determinar las tensiones por flexión máximas. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 1.500 kg/cm²

37. El momento flector máximo que existe en una viga de acero es de 550.000 kg-cm. Elegir el perfil de ala ancha más económico que resiste este momento si la tensión de trabajo en tracción y compresión es de 1.400 kg/cm². *Sol.* H 180

38. La viga representada en la Fig. (*a*) está simplemente apoyada en sus extremos y soporta las dos cargas colocadas simétricamente, de 6.000 kg cada una. Si la tensión de trabajo, tanto en tracción como en compresión, es de 1.250 kg/cm², elegir el perfil de ala ancha más económico para soportar esas cargas. *Sol.* H 160

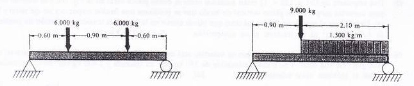


Fig. (*a*) Prob. 38 Fig. (*b*) Prob. 39

39. Considerar la viga simplemente apoyada con las cargas aisladas y uniforme de la Fig. (*b*). Elegir un perfil de ala ancha apropiado para resistir esas cargas basándose en una tensión de trabajo en tracción y en compresión de 1.400 kg/cm². *Sol.* H 200

40. Las dos cargas repartidas están soportadas por la viga simplemente apoyada que se muestra en la Fig. (*a*). Se trata de un perfil H 160. Determinar la magnitud y situación de la tensión por flexión máxima en la viga.
Sol. 613 kg/cm², a 1,83 m del soporte derecho.

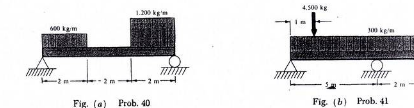


Fig. (*a*) Prob. 40 Fig. (*b*) Prob. 41

41. La viga con extremo en voladizo representada en la Fig. (*b*) es de sección circular con 15 cm de diámetro. Determinar (*a*) la tensión por flexión máxima en la barra y su situación, (*b*) el valor de esa tensión en las fibras extremas de la barra en la sección central entre los soportes.
Sol. (*a*) 1.230 kg/cm² bajo la carga aislada; (*b*) 870 kg/cm²

42. Elegir el perfil de ala ancha más económico para soportar la carga descrita en el problema anterior. Utilizar una tensión de trabajo en tracción y en compresión de 1.250 kg/cm². *Sol.* H 160

43. Con referencia a la Fig. (*c*), una viga T con la sección representada vuela metro y medio en voladizo desde un muro, y soporta una carga uniformemente repartida de 600 kg/m incluyendo su peso propio. Determinar las tensiones de compresión y de tracción máximas. *Sol.* −1.417 kg/cm², +607 kg/cm²

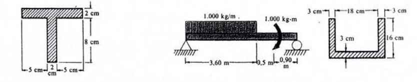


Fig. (*c*) Prob. 43 Fig. (*d*) Prob. 44

44. La viga de acero simplemente apoyada está cargada con la carga uniformemente repartida y el par representados en la Fig. (*d*). La viga tiene la sección U representada. Determinar las tensiones máximas de tracción y de compresión que se originan. *Sol.* 353 kg/cm² tracción, 645 kg/cm² compresión

45. Dos angulares de 120 × 120 × 12 están soldados entre sí, como puede verse en la Fig. (*e*), y se utilizan como viga para soportar cargas en un plano vertical de modo que se produzca una flexión respecto a un eje neutro horizontal. Determinar el momento flector máximo que puede existir en la viga si la tensión por flexión no puede exceder de 1.400 kg/cm² ni en tracción ni en compresión. *Sol.* 1.220 kg-m

46. La viga en forma de U con un extremo en voladizo está cargada como se ve en la Fig. (*f*). El material es fundición gris con una tensión de trabajo admisible de 350 kg/cm² en tracción y 1.400 kg/cm² en compresión. Determinar el máximo valor admisible de P. *Sol.* 455 kg

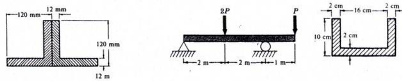
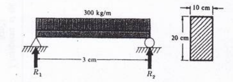


Fig. (*e*) Prob. 45 Fig. (*f*) Prob. 46

47. Una viga de madera de 8 × 12 cm de sección está sometida a un esfuerzo cortante transversal máximo de 1.000 kg. Determinar la tensión cortante en los puntos separados 2 cm en la altura de la viga.
Sol. 0, 8,7 kg/cm², 13,9 kg/cm², 15,6 kg/cm², 13,9 kg/cm², 8,7 kg/cm², 0

48. La viga simplemente apoyada de 3 m de longitud y sección 10 cm por 20 cm soporta una carga uniforme de 300 kg/m, como puede verse en la figura adjunta. Despreciando el peso propio, hallar (*a*) la tensión normal máxima en la viga; (*b*) la tensión cortante máxima; (*c*) la tensión cortante en un punto a 60 cm a la derecha de R_1 y 2,5 cm por debajo de la cara superior de la viga.
Sol. (*a*) 50,6 kg/cm², (*b*) 3,4 kg/cm², (*c*) 0,89 kg/cm²



49. Determinar (*a*) la tensión por flexión máxima y (*b*) la tensión cortante máxima en la viga representada en la Figura (*a*). La viga está simplemente apoyada y tiene sección rectangular.
Sol. (*a*) 1.400 kg/cm², (*b*) 65 kg/cm²

50. Una viga rectangular de cedro colorado que tiene una sección de 15 × 20 cm está simplemente apoyada en los extremos y tiene una luz de 2,40 m. Si la tensión por flexión admisible es de 165 kg/cm² y la tensión cortante de 6,5 kg/cm², determinar la intensidad de carga uniforme que puede aplicarse sobre toda la viga.
Sol. 1.083 kg/m

51. Una viga tiene la sección en *U* representada en la Fig. (*b*). Si el esfuerzo cortante máximo en la viga es de 3.000 kg, determinar la tensión cortante máxima que se produce. *Sol.* 138 kg

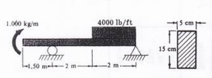


Fig. (*a*) Prob. 49

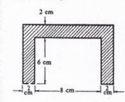


Fig. (*b*) Prob. 51

CARACTERISTICAS DE PERFILES DE ALA ANCHA

(Tabla reducida)

Perfil	Peso por metro (kg/m)	Sección (cm^2)	I (respecto al eje x) (cm^4)	Wx (cm^3)	I (respecto al eje y) (cm^4)
H 120	26,9	34,3	864	144	317
H 140	34,6	44,1	1.520	217	550
H 160	45,8	58,4	2.630	329	958
H 180	51,6	65,8	3,830	426	1.360
H 200	64,9	82,7	5.950	595	2.140
H 220	71,5	91,1	8.050	732	2.840

CAPITULO 9

Deformación de vigas. Método de la doble integración

INTRODUCCION. En el Capítulo 8 se vio que las cargas laterales aplicadas a una viga no solo dan origen a tensiones internas de flexión y cortantes en la barra, sino que hacían que ésta flexase en sentido perpendicular a su eje longitudinal. En el Capítulo 8 se estudiaron esas tensiones y en éste y en el 10 se examinarán los métodos para calcular las deformaciones.

DEFINICION DE FLECHA DE UNA VIGA. La deformación de una viga se suele expresar en función de la flecha desde la posición no deformada. Se mide desde la superficie neutra de la viga deformada hasta la posición original de dicha superficie. La figura adoptada por la superficie neutra deformada se conoce como curva elástica de la viga. La Fig. 1 representa la viga en su estado primitivo sin deformar y la Fig. 2, la viga en la posición deformada que adopta bajo la acción de las cargas.

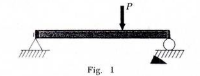


Fig. 1

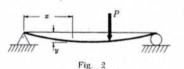


Fig. 2

Se dice que el desplazamiento y es la flecha de la viga. Generalmente, será necesario determinar la flecha y para cada valor de x a lo largo de la viga. La relación se puede escribir en forma de ecuación, que se llama ecuación de la curva deformada (o elástica) de la viga.

IMPORTANCIA DE LAS FLECHAS DE LAS VIGAS. Las condiciones de diseño de las vigas imponen frecuentemente limitaciones sobre las flechas, lo mismo que sobre las tensiones. Por consiguiente, además del cálculo de las tensiones que se ha visto en el Capítulo 8 es esencial que el proyectista sea capaz de determinar las flechas. Por ejemplo, en muchos códigos de la edificación, la flecha máxima admisible no debe exceder de 1/300 de la longitud de la viga. Así, una viga bien proyectada no solo debe ser capaz de soportar las cargas a que estará sometida, sino que no deberá sufrir flechas indeseablemente grandes. Además, el cálculo de las reacciones en las vigas estáticamente indeterminadas exige el empleo de varias relaciones con deformaciones. Estas se examinarán en detalle en el Capítulo 11.

METODOS PARA DETERMINAR LAS FLECHAS EN LAS VIGAS. Existen numerosos métodos para determinar las flechas en las vigas. Los utilizados más frecuentemente son:

(*a*) El método de la doble integración.

(*b*) El método del área de momentos.

(*c*) Métodos de la energía elástica.

El primero de ellos se estudia en el capítulo presente. El del área de momentos se examinará en el Capítulo 10 y el estudio de los métodos de la energía se puede encontrar en libros de resistencia de materiales más avanzados.

METODO DE LA DOBLE INTEGRACION. La ecuación diferencial de la curva deformada de la viga es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (1)$$

donde x e y son las coordenadas, representadas en la figura anterior, de la viga deformada. Esto es, y es la flecha de la viga. En el Problema 1 se deduce esta expresión. En ella, E representa el módulo de elasticidad de la viga, I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro, que pasa por su centro de gravedad y M el momento flector a la distancia x de uno de los extremos de la viga. En el Capítulo 6 se vio que esta magnitud es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores de un lado de la sección a la distancia x del extremo, respecto a un eje que pasa por ella. Generalmente, M será función de x, y para obtener una expresión algebraica de la flecha y en función de x será necesario integrar dos veces la ecuación (*1*).

La ecuación (*1*) es la ecuación diferencial fundamental que determina la deformada de cualquier viga, independientemente del tipo de carga aplicada. Para aplicaciones, véanse los Problemas 2, 6, 8, 10, 13, 15, 17, 20, 22 y 24.

PROCESO DE INTEGRACION. El método de la doble integración para calcular la flecha de las vigas consiste simplemente en integrar la ecuación (*1*). La primera integración nos da la pendiente dy/dx en un punto cualquiera de la viga y la segunda, la flecha y para cada valor de x. Indudablemente, el momento flector M ha de estar expresado como función de la coordenada x, antes de poder integrar la ecuación. Para los casos que estudiaremos, las integraciones son sumamente fáciles.

Como la ecuación diferencial (*1*) es de segundo orden, su solución contendrá dos constantes de integración, que deberán calcularse a partir de las condiciones de pendiente o flecha conocidas en determinados puntos de la viga. Por ejemplo, en el caso de una viga en voladizo, se determinarán las constantes por las condiciones de variación de pendiente cero y flecha nula en el extremo empotrado.

Para describir el momento flector en las diversas regiones a lo largo de la viga, frecuentemente se necesitan dos o más ecuaciones, como se recalcó en el Capítulo 6. En tal caso, debe escribirse la ecuación (*1*) para cada región y en cada una de ellas se obtendrán dos constantes en la integración, constantes que deberán determinarse de modo que las deformaciones y pendientes sean continuas en los puntos comunes a dos regiones. Para ejemplos, véanse los Problemas 15, 17, 20, 22 y 24.

CRITERIOS DE SIGNOS. Se conservarán los criterios de signos de los momentos flectores, adoptados en el Capítulo 6. Las cantidades E e I que aparecen en la ecuación (*1*) son, indudablemente, positivas, por lo que si M es positivo para un cierto valor de x, también lo es d^2y/dx^2. Con el criterio anterior de signos de los momentos flectores es necesario considerar la coordenada x positiva hacia la derecha a lo largo de la viga y la flecha y positiva hacia arriba. En el Problema 1 se explicará esto en detalle. Con estos signos algebraicos puede integrarse la ecuación (*1*) y hallar la flecha y en función de x, entendiendo que las flechas de la viga hacia arriba son positivas y hacia abajo, negativas.

HIPOTESIS Y LIMITACIONES. Al deducir la ecuacion (*1*) se supone que las deformaciones producidas por la acción del cortante son despreciables comparadas con las producidas por la flexión.

También se supone que las deformaciones son pequeñas comparadas con las dimensiones de la sección de la viga. Además, se admite que la viga es recta antes de la aplicación de las cargas. Todas estas condiciones se añaden a las hipótesis referentes a la teoría de las vigas que se enumeran en el Capítulo 8.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Obtener la ecuación diferencial de la curva deformada de una viga cargada con fuerzas laterales.

En el Problema 1 del Capítulo 8 se dedujo la fórmula

$$M = \frac{EI}{\rho} \tag{1}$$

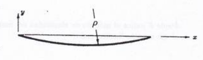
En esta expresión, M expresa el momento flector que actúa en una determinada sección de la viga, ρ el radio de curvatura de la superficie neutra de la viga en esa misma sección, E el módulo de elasticidad e I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro que pasa por su centro de gravedad. En este libro solo trataremos de vigas para las cuales E e I son constantes en toda su longitud, pero, en general, tanto M como ρ serán funciones de x.

La ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{2}$$

en la que el segundo miembro representa la curvatura de la superficie neutra de la viga. Como M variará a lo largo de la viga, la curva deformada tendrá curvatura variable.

Representemos, en el dibujo adjunto, la superficie neutra de la viga flexada por la línea gruesa. Antes de cargar, la viga coincidía con el eje x, por lo que el sistema coordenado que suele ser más conveniente es el que aparece en la figura. Se toma la flecha y positiva hacia arriba, por lo que para la viga representada, todas las flechas son negativas.



Por cálculo diferencial se halla fácilmente una expresión de la curvatura en un punto cualquiera de la curva que representa la viga deformada. La fórmula exacta de la curvatura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \tag{3}$$

En esta expresión, dy/dx representa la pendiente de la curva en un punto cualquiera, y para deformaciones pequeñas esta cantidad, y sobre todo su cuadrado, son pequeños en comparación con la unidad, por lo que pueden despreciarse. Esta hipótesis de las deformaciones pequeñas simplifica la expresión de la curvatura que queda en la forma

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \tag{4}$$

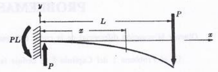
Por tanto, para deformaciones pequeñas, la ecuación (2) se convierte en $d^2y/dx^2 = M/EI$ o

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{5}$$

Que es la ecuación diferencial de la curva deformada de una viga cargada con fuerzas laterales. En cada proble-

ma es necesario integrar esta ecuación para obtener una relación algebraica entre la flecha y y la coordenada x a lo largo de la viga. En los problemas siguientes se hará esto.

2. Determinar la flecha en cada punto de la viga en voladizo, sometida a la carga aislada P, representada en la figura adjunta.



Se adopta el sistema de coordenadas x-y que puede verse, en el que el eje x coincide con la posición original, no flexada, de la viga. La viga deformada tiene el aspecto indicado por la línea gruesa. Primero tenemos que hallar las reacciones que ejerce el muro sobre la barra, lo que se consigue fácilmente, como se vio en el Problema 1 del Capítulo 6, obteniéndose por la estática que se trata de una fuerza vertical P y un momento PL como se ha representado en la figura.

El momento flector en una sección cualquiera a la distancia x del muro viene dado por la suma de los momentos de esas dos reacciones respecto a un eje por esa sección. Evidentemente, la fuerza vertical P dirigida hacia arriba produce un momento flector positivo Px, y el par PL si actuara solo produciría la curvatura de la barra indicada, lo que, de acuerdo con el criterio de signos del Capítulo 6, constituye un momento negativo. Por tanto, el momento flector M en la sección x es



$$M = -PL + Px$$

La ecuación diferencial de la viga flexada es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

donde E indica el módulo de elasticidad del material e I representa el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro. Sustituyendo,

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -PL + Px$$

Esta ecuación se integra fácilmente una vez, obteniéndose

$$(2) \qquad EI\frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1$$

que representa la ecuación de la pendiente, en la que C_1 es una constante de integración, que puede calcularse utilizando la condición de ser nula la pendiente dy/dx de la viga en el muro, pues está perfectamente empotrada en él. Por tanto, $(dy/dx)_{x=0} = 0$. La ecuación (2) es cierta para todos los valores de x e y, y si se sustituye en ella la condición para $x = 0$, se tiene $0 = 0 + 0 + C_1$ o $C_1 = 0$.

Ahora, la integración de la ecuación (2) da

$$(3) \qquad EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_2$$

donde C_2 es una segunda constante de integración. Nuevamente se podrá determinar por la condición en el muro de empotramiento. Allí, para $x = 0$ la flecha y es cero, pues la barra está empotrada rígidamente, y sustituyendo $(y)_{x=0} = 0$ en la ecuación (3) vemos que $0 = 0 + 0 + C_2$ o $C_2 = 0$.

Así, pues, las ecuaciones (2) y (3), con $C_1 = C_2 = 0$, dan la pendiente dy/dx y la flecha y en un punto cual-

quiera x de la viga. La flecha es máxima en el extremo derecho ($x = L$), bajo la carga P y, por la ecuación *(3)*, se halla que es

$$EI(y)_{max} = -\frac{PL^3}{3}$$

en la que el signo negativo indica que este punto está, en la curva deformada, por debajo del eje x. Si solo se desea conocer la magnitud de la flecha máxima en $x = L$, se suele representar por Δ y tenemos

(4) $$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

3. La viga en voladizo del Problema 2 tiene 3 m de longitud y está cargada con una fuerza P de 1.200 kg. Se trata de un perfil H 220, con un momento de inercia respecto al eje neutro, de 8.050 cm⁴. Determinar la flecha máxima de la viga. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

La flecha máxima se produce en el extremo libre de la viga bajo la carga aislada y en el Problema 2 se halló que es

$$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{1.200(300)^3}{3(2{,}1 \times 10^6)(8.050)} = 0{,}64 \text{ cm}$$

Esta flecha es hacia abajo, como se indica en la figura del Problema 2. Para deducir esta fórmula se supuso que el material de la viga sigue la ley de Hooke; pero con los cálculos anteriores solo, no hay seguridad de que no esté sometido a tensiones fuera del límite de proporcionalidad. Si fuera así, la ecuación fundamental de la flexión de la viga $EI(d^2y/dx^2) = M$ ya no sería válida y los valores numéricos anteriores no tendrían significado. Por consiguiente, en todos los problemas que tratan de las flechas de vigas hay que recalcar que es necesario determinar que la máxima tensión por flexión está por debajo del límite de proporcionalidad del material, lo que es fácil de hacer utilizando la fórmula de la flexión deducida en el Problema 1 del Capítulo 8. De acuerdo con esa fórmula

$$\sigma = Mv/I$$

donde σ expresa la tensión por flexión, M el momento flector, v la distancia desde el eje neutro a las fibras extremas de la viga e I el momento de inercia de la sección respecto al eje neutro. En este problema, el momento flector máximo tiene lugar en el muro de sujeción y está dado por $M_{max} = 1.200(300) = 360.000$ kg-cm. Sustituyendo en la fórmula de la tensión, tenemos

$$\sigma_{max} = 360.000(11)/8.050 = 492 \text{ kg/cm}^2$$

Como este valor está por debajo del límite de proporcionalidad del acero, que es aproximadamente 2.100 kg/cm² para el acero al carbono de estructuras, es justificable el empleo de la ecuación de la deformación de la viga.

4. Determinar la pendiente del extremo derecho de la viga en voladizo cargada como se vio en el Problema 2. Hallar, para la viga descrita en el Problema 3, el valor de esta pendiente.

En el Problema 2 se vio que la ecuación de la pendiente era

$$EI\frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2}$$

En el extremo libre, $x = L$, y tenemos $EI(\frac{dy}{dx}_{x=L}) = -PL^2 + \frac{PL^2}{2}$

Por tanto, la pendiente en el extremo libre es $(\frac{dy}{dx}_{x=L}) = -\frac{PL^2}{2EI}$

Para la viga descrita en el Problema 3, esto vale $(\frac{dy}{dx}_{x=L}) = -\frac{1.200(300)^2}{2(2{,}1 \times 10^6)(8.050)}$

$$= -0{,}00320 \text{ radianes.}$$

5. Determinar la flecha en el punto medio, $x = 1{,}5$ m, de la viga descrita en el Problema 3.

En el Problema 2 se halló que la ecuación de la curva deformada era $EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6}$.

En el punto medio, $x = 1{,}50$ m y los demás parámetros tienen el mismo valor que en el Problema 3. Sustituyendo,

$$(y)_{x=1,50} = \frac{1}{(2{,}1 \times 10^6)(8.050)}\left[-1.200(300)\frac{(150)^2}{2} + \frac{1.200(150)^3}{6}\right] = -0{,}1997 \text{ cm}$$

El signo negativo indica que este punto está en la viga flexada por debajo del eje x.

6. Determinar la flecha en cada punto de la viga en voladizo sometida a la carga uniformemente repartida de p kg por metro lineal, de la figura.

Se toma el sistema de coordenadas x-y representado, en el que el eje x coincide con la posición original, sin deformar, de la viga. La viga deformada tiene el aspecto representado por la línea gruesa. La ecuación del momento flector puede hallarse de un modo análogo al utilizado en el Problema 2, pero en lugar de ello adoptaremos una ligera simplificación. Determinemos el momento flector en una sección a la distancia x del muro, considerando las fuerzas a la derecha de dicha sección en lugar de las de la izquierda.

y
p kg/unidad de longitud
x
x
L

La fuerza de p kg/m actúa en la longitud $(L - x)$ a la derecha de la sección, siendo la fuerza resultante de $p(L - x)$ kg, aplicada en el centro de esta longitud, por lo que el brazo del momento desde x es de $\frac{1}{2}(L - x)$. Por tanto, el momento flector en esa sección es

$$M = -\frac{p}{2}(L - x)^2$$

con signo negativo, pues las cargas dirigidas hacia abajo producen momentos negativos.

La ecuación diferencial de la viga flexada es, pues,

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2}(L - x)^2$$

La primera integración da

$$(2) \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2}\left[\frac{(L - x)^3}{3}\right] + C_1$$

donde C_1 es una constante de integración.

Esta constante puede calcularse teniendo en cuenta que el extremo izquierdo de la viga está rígidamente empotrado. En ese punto, $x = 0$, no hay variación de la pendiente y, por tanto, $(dy/dx)_{x=0} = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) hallamos $0 = pL^3/6 + C_1$, de donde $C_1 = -pL^3/6$. Por tanto, tenemos

$$(2') \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{p}{6}(L - x)^3 - \frac{pL^3}{6}$$

La siguiente integración conduce a

$$(3) \qquad EIy = -\frac{p}{6}\left[\frac{(L - x)^4}{4}\right] - \frac{pL^3}{6}x + C_2$$

donde C_2 representa una segunda constante de integración.

En el extremo empotrado, $x = 0$, de la viga la flecha es cero, y como la ecuación (3) es válida para todos los valores de x e y, se puede sustituir en ella este par de valores. Haciendo esto, tenemos

$$0 = -pL^4/24 + C_2, \qquad \text{de donde} \qquad C_2 = pL^4/24$$

Por tanto, la forma definitiva de la curva de las flechas de la viga es

(3') $$EIy = -\frac{p}{24}(L-x)^4 - \frac{pL^3}{6}x + \frac{pL^4}{24}$$

La flecha es máxima en el extremo derecho de la viga ($x = L$), y en este punto, por la ecuación (3'), tenemos

$$EI(y)_{max} = -\frac{pL^4}{6} + \frac{pL^4}{24} = -\frac{pL^4}{8}$$

donde el signo menos indica que en ese punto la curva deformada está debajo del eje x. Si solo se desea saber la magnitud de la flecha máxima, se suele representar por Δ, y la expresión anterior vale

(4) $$\Delta_{max} = \frac{pL^4}{8EI}$$

7. La viga en voladizo del Problema 6 es de sección rectangular de 10 × 15 cm. La barra mide 2 m de longitud y soporta una carga uniformemente repartida de 1.000 kg/m. El material es acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Determinar la flecha máxima.

La flecha máxima se produce en el extremo libre, y en el Problema 6 se vio que es

$$\Delta_{max} = \frac{pL^4}{8EI}$$

Aquí, I para la sección rectangular es $bh^3/12 = 10(15)^3/12 = 2.812$ cm⁴. Al utilizar esta ecuación es muy importante el emplear unidades homogéneas. Para ello, conviene expresar p en kg/cm, L en cm, E en kg/cm² e I en cm⁴. Haciendo esto, obtenemos

$$\Delta_{max} = \frac{(1.000/100)(200)^4}{8(2{,}1 \times 10^6)(2.812)} = 0{,}338 \text{ cm}$$

También aquí debemos hallar la tensión máxima en la barra. El momento flector máximo se produce en el muro de sujeción y es

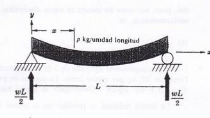
$$M_{max} = 1.000(2)(1) = 2.000 \text{ kg-m}$$

La tensión máxima tiene lugar en las fibras extremas de la viga en la sección inmediata al muro, y está dada por $\sigma = Mv/I$, donde $v = 7{,}5$ cm. Sustituyendo,

$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} = \frac{(2.000 \times 100)(7{,}5)}{2.812} = 534 \text{ kg/cm}^2$$

Como este valor está muy por debajo del límite de proporcionalidad del material, que es al menos de 2.100 kg/cm², es válido el empleo de la fórmula anterior para la flecha.

8. Obtener una expresión de la curva de deformaciones de la viga simplemente apoyada sometida a la carga uniformemente repartida de p g por unidad de longitud, de la figura.



Se adopta el sistema de coordenadas x-y representado, en el que el eje x coincide con la posición original de la viga, sin flexar. La viga deformada tiene el aspecto que muestra la línea gruesa. La carga total que actúa sobre la viga es de pL kg y, por simetría, cada una de las reacciones es de $pL/2$ kg. Por la simetría de la carga, resulta evidente que la viga deformada es simétrica respecto al punto medio de la barra en $x = L/2$.

En el Problema 6 del Capítulo 6 se estudió la ley de momentos flectores en una sección cualquiera de la viga cargada y soportada como ésta. De acuerdo con el método indicado allí, se sustituye la parte de carga uniforme a la derecha de la sección a la distancia x del apoyo izquierdo, por su resultante que actúa en el punto medio del

trozo de longitud x. La resultante es px dirigida hacia abajo que da, por consiguiente, origen a un momento negativo. La reacción $pL/2$ produce un momento flector positivo, por lo que, para cada valor de x, el momento flector es

$$M = \frac{pL}{2}x - px\left(\frac{x}{2}\right)$$

La ecuación diferencial de la viga flexada es $EI(d^2y/dx^2) = M$. Sustituyendo,

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2}$$

Integrando,

$$(2) \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{pL}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

Hay que observar que dy/dx representa la pendiente de la viga. Como la viga flexada es simétrica respecto al centro de la luz, esto es, respecto a $x = L/2$, es evidente que allí debe ser nula la pendiente. Esto es, la tangente a la viga deformada es horizontal en el centro de la misma, condición que nos permite determinar C_1: sustituyendo en (2), tenemos $(dy/dx)_{x=L/2} = 0$.

$$0 = \frac{pL}{4}\left(\frac{L^2}{4}\right) - \frac{p}{6}\left(\frac{L^3}{8}\right) + C_1 \qquad \text{o} \qquad C_1 = -\frac{pL^3}{24}$$

Por tanto, la pendiente en un punto cualquiera está dada por

$$(2') \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{pL}{4}x^2 - \frac{p}{6}x^3 - \frac{pL^3}{24}$$

Integrando nuevamente hallamos

$$(3) \qquad EIy = \frac{pL}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{p}{6}\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{pL^3}{24}x + C_2$$

Esta segunda constante de integración C_2 se determina fácilmente por el hecho de ser nula la flecha y en el apoyo izquierdo. Sustituyendo $(y)_{x=0} = 0$ en (3), hallamos $0 = 0 - 0 - 0 + C_2$ y $C_2 = 0$.

La forma final de la ecuación de la elástica es, pues,

$$(3') \qquad EIy = \frac{pL}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 - \frac{pL^3}{24}x$$

La flecha máxima de la viga se produce en el centro, a causa de la simetría. Sustituyendo $x = L/2$ en la ecuación (3'), obtenemos

$$EI(y)_{max} = -\frac{5\,pL^4}{384}$$

Así, pues, sin tener en cuenta el signo algebraico, la flecha máxima de una viga simplemente apoyada, cargada uniformemente, es

$$(4) \qquad \Delta_{max} = \frac{5}{384}\cdot\frac{pL^4}{EI}$$

9. Una viga simplemente apoyada de 3 m de longitud, de sección rectangular de 10 × 20 cm, soporta una carga uniforme de 300 kg por metro lineal. La viga es de pino blanco, con un límite de proporcionalidad de 420 kg/cm² y $E = 0{,}9 \times 10^5$ kg/cm². Determinar la flecha máxima.

La flecha máxima se produce en el centro de la viga y es (Problema 8) $\Delta_{max} = \dfrac{5}{384}\cdot\dfrac{pL^4}{EI}$.

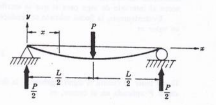
Para la sección rectangular tenemos $I = \dfrac{1}{12}bh^3 = \dfrac{1}{12}(10)(20)^3 = 6.666$ cm⁴.

Consideremos la carga de 300/100 kg/cm y la longitud de 300 cm. Sustituyendo estos valores,

$$\Delta_{max} = \frac{5}{384}\cdot\frac{(300/100)(300)^4}{(0{,}9 \times 10^5)(6.666)} = 0{,}527 \text{ cm}$$

En el Problema 48 del Capítulo 8 se estudió la tensión máxima en esta viga y se halló que era de 50,6 kg/cm². Como este valor es inferior al límite de proporcionalidad del material, es válido el empleo de la fórmula anterior.

10. Obtener una ecuación para la elástica de la viga simplemente apoyada sometida a la carga aislada P aplicada en su centro, como se ve en la figura.



Se introduce el sistema de coordenadas x-y representado. La viga deformada tiene el aspecto que indica la línea gruesa. Por simetría, cada reacción vale, indudablemente, $P/2$.

En el Problema 4 del Capítulo 6 se estudió la ecuación del momento flector en cada punto de una viga cargada como ésta. De acuerdo con lo visto allí, el momento flector en la mitad izquierda de la viga es

$$M = \frac{P}{2}x \qquad \text{para} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

La ecuación diferencial de la viga deformada es $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$, y sustituyendo,

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}x \qquad \text{para} \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

La primera integración de esta ecuación produce

$$(2) \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

La pendiente de la viga está representada por dy/dx. Como está cargada en su punto medio, las flechas son simétricas respecto al centro, esto es, respecto a la sección $x = L/2$, y esta condición de simetría indica que la pendiente ha de ser nula para $x = L/2$, esto es, que la tangente a la elástica es horizontal en ese punto. Sustituyendo esta condición $(dy/dx)_{x=L/2} = 0$ en la ecuación (2), obtenemos

$$0 = \frac{P}{4}\left(\frac{L^2}{4}\right) + C_1 \qquad \text{y} \qquad C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

Y la pendiente dy/dx en un punto cualquiera de la viga está dada por

$$(2') \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16}$$

Integrando nuevamente, tenemos

$$(3) \qquad EIy = \frac{P}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{PL^2}{16}x \times C^2$$

La segunda constante de integración, C_2, se determina por ser la flecha y de la viga nula en el apoyo izquierdo $(y)_{x=0} = 0$. Sustituyendo en (3), obtenemos $0 = 0 - 0 + C_2$ y $C_2 = 0$.

Por tanto, la curva de deformaciones de la mitad izquierda de la viga está dada por

$$(3') \qquad EIy = \frac{P}{12}x^3 - \frac{PL^2}{16}x$$

Al llegar aquí, conviene prestar atención al hecho de *no* ser admisible hacer uso de la condición de flecha y nula en el apoyo derecho, esto es, $(y)_{x=L} = 0$, pues la ecuación del momento flector, $M = (P/2)x$, solo es válida para valores de x menores que $L/2$, es decir, a la izquierda de la carga aplicada P. A la derecha de P, la ecuación de momentos contiene un término más, y si quisiéramos aplicar la condición $(y)_{x=L} = 0$ tendríamos que utilizar la ecuación correspondiente a la mitad derecha de la viga. En realidad, no es necesario examinar las flechas en los puntos a la derecha de la carga, pues se sabe que la elástica es simétrica respecto a $x = L/2$. En resumen, para

determinar las constantes de integración solo pueden utilizarse las condiciones de flecha o pendiente que pertenecen al intervalo de viga para el que se escribió la ley de momentos flectores.

Evidentemente, la flecha máxima se produce en el centro de la viga, en virtud de la simetría. En este punto, su valor es

$$EI(y)_{max} = -\frac{PL^3}{48}$$

O, sin tener en cuenta el signo algebraico, la flecha máxima de una viga simplemente apoyada, sometida a una carga P aplicada en el centro, es

(4) $$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI}$$

11. La viga simplemente apoyada del Problema 10 tiene 4 m de longitud y sección circular de 10 cm de diámetro. Si la máxima flecha admisible es de 0,5 cm, determinar el valor máximo de la carga P. El material es acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

En la ecuación (4) del Problema 10 se halló que la flecha máxima es $\Delta_{max} = \dfrac{PL^3}{48EI}$.

Para una viga de sección circular (véase Problema 11, Capítulo 7), $I = \pi D^4/64 = \pi 10^4/64 = 491$ cm⁴. Además, $L = 4$ m $= 400$ cm. Sustituyendo, $0{,}5 = \dfrac{P(400)^3}{48(2{,}1 \times 10^6)(491)}$ y $P = 387$ kg.

Con esta carga aplicada en el centro de la viga, la reacción en cada extremo es de 193 kg y el momento flector en el centro, de 193,5(2) = 387 kg-m. Este es el momento flector máximo en la viga y la tensión máxima se produce en las fibras extremas en esta sección central. Su valor está dado por $\sigma = \dfrac{Mv}{I}$, por lo que $\sigma_{max} = \dfrac{387(100)(5)}{491} = 394$ kg/cm². Este valor está por debajo del límite de proporcionalidad del material, por lo cual era admisible el empleo de la ecuación que da la flecha.

12. Considerar nuevamente la viga simplemente apoyada del Problema 11. Determinar la pendiente en el apoyo izquierdo.

Según la ecuación (2') del Problema 10, la pendiente dy/dx en una sección a la distancia x del apoyo izquierdo está dada por

(1) $$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{4}x^2 - \frac{PL^2}{16}$$

En el apoyo izquierdo $x = 0$ y, como antes, tenemos $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $I = 490$ cm⁴, $P = 387$ kg, y $L = 400$ cm. Sustituyendo,

(2) $$(2{,}1 \times 10^6)(490)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{387(400)^2}{16} \quad \text{y} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0{,}00376 \text{ radianes}$$

La pendiente dy/dx representa, en realidad, la tangente del ángulo de inclinación de la elástica. Para deformaciones muy pequeñas, como las que consideramos en este capítulo, el valor del ángulo expresado en radianes es sensiblemente igual a su tangente, por lo que la pendiente $(dy/dx)_{x=0}$ se expresa por 0,00376 radianes. La observación de las unidades en la ecuación (2) revela que dy/dx carece de dimensión, y el radián es en realidad una unidad adimensional de medida angular.

13. Determinar la ecuación de la elástica de una viga simplemente apoyada sometida a un par M_1 en el extremo derecho, como se ve en la figura.

Primeramente necesitamos determinar las reacciones que actúan en la viga. Como solo puede mantenerse en equilibrio el par aplicado M_1, por la acción de otro par, es evidente que las reacciones en los extremos deberán ser fuerzas de igual magnitud R, pero de sentido opuesto, como se indica abajo. Para hallar su magnitud, podemos escribir la ecuación de la estática

$$\Sigma M_0 = -M_1 + RL = 0 \quad \text{y} \quad R = M_1/L$$

La línea gruesa indica la forma de la viga flexada. El momento flector en un punto a la distancia x de la reacción izquierda es

$$M = Rx = \frac{M_1}{L}x$$

Esta ecuación es válida para todos los valores de x.

La ecuación diferencial de la viga deformada es

(*1*) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_1}{L}x$$

Integrando una vez, obtenemos

(*2*) $$EI\frac{dy}{dx} = \frac{M_1}{L}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

No disponemos de ningún dato sobre la pendiente de la viga, por lo que no es posible en este momento determinar C_1. Hay que observar que no existe simetría de cargas, por lo que no tenemos razón alguna para esperar que la pendiente sea nula en el punto medio de la viga. Integramos nuevamente, y obtenemos

(*3*) $$EIy = \frac{M_1}{2L}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2$$

En este momento ya podemos determinar las constantes de integración C_1 y C_2, pues es evidente que la flecha es nula en el apoyo izquierdo, esto es, que $(y)_{x=0} = 0$. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación (*3*), obtenemos $0 = 0 + 0 + C_2$ y $C_2 = 0$.

Además, la flecha y es cero en el apoyo derecho, esto es, $(y)_{x=L} = 0$. Sustituyendo estos valores de x e y en (*3*) hallamos que $0 = \frac{M_1}{6L}L^3 + C_1L$ y $C_1 = -\frac{M_1L}{6}$.

Por consiguiente, la elástica de la viga es

(*3'*) $$EIy = \frac{M_1x^3}{6L} - \frac{M_1L}{6}x$$

La flecha máxima se produce en el punto en que la pendiente es nula, o sea, en el que la tangente a la elástica es horizontal. Para hallar la coordenada x de este punto basta hacer igual a cero el primer miembro de (*2*). Se obtiene $0 = \frac{M_1x^2}{2L} - \frac{M_1L}{6}$, y $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$. Por tanto, la flecha máxima de la viga tiene lugar a la distancia $L/\sqrt{3}$ de la reacción izquierda. El valor de esta flecha se halla sustituyendo $x = L/\sqrt{3}$ en la ecuación (*3'*), obteniéndose

(*4*) $$EI(y)_{max} = \frac{M_1}{6L}\cdot\frac{L^3}{3\sqrt{3}} - \frac{M_1L}{6}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}} = -\frac{M_1L^2\sqrt{3}}{27}$$

14. Una viga simplemente apoyada está sometida a un par M_1, como se vio en el Problema 13. Tiene 1,80 m de longitud y sección cuadrada de 5 cm de lado. Si la flecha máxima admisible es de 0,50 cm y la tensión de 1.400 kg/cm², hallar el máximo valor posible de M_1. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

Probablemente, lo más sencillo es determinar dos valores de M_1: uno basado en la suposición de que se cumple la condición de flecha igual a 0,50 cm y otro en la hipótesis de ser la tensión máxima en la barra de 1.400 kg/cm². El verdadero valor de M_1 será el menor de los dos.

Consideremos primero que la flecha máxima en la viga es de 0,50 cm. De acuerdo con la ecuación (4) del Problema 13, tenemos

$$0{,}50 = \frac{M_1(180)^2\sqrt{3}}{27(2{,}1\times 10^6)\frac{1}{12}(5)(5)^3} \quad \text{y} \quad M_1 = 26.300 \text{ kg-cm}$$

Ahora supondremos que en las fibras extremas de la viga, en el punto de momento flector máximo, existe la tensión admisible de 1.400 kg/cm². A la derecha se muestra el diagrama de momentos flectores; en él se ve que el momento flector máximo en la viga es M_1. Utilizando la fórmula usual $\sigma = Mv/I$, tenemos que en las fibras extremas de la barra, en el extremo derecho, es



$$1.400 = \frac{M_1(2.5)}{\frac{1}{12}(5)(5)^3} \quad \text{y} \quad M_1 = 29.200 \text{ kg-cm}$$

Por tanto, el momento máximo admisible es $M_1 = 26.300$ kg-cm.

15. Determinar la elástica de la viga simplemente apoyada, sometida a la carga P aislada que se muestra en la figura.

Se adopta el sistema coordenado x-y que puede verse. La línea gruesa representa la forma de la viga deformada. Por la estática, se halla fácilmente que las reacciones tienen los valores $R_1 = Pb/L$ y $R_2 = Pa/L$.

Este problema presenta una característica que le distingue de los resueltos hasta ahora en este capítulo, que consiste en la necesidad de considerar dos ecuaciones distintas para el momento flector en la viga, una de ellas válida a la izquierda de la carga P, y la otra a la derecha de esta fuerza. La integración de cada ecuación da origen a dos constantes de integración, por lo que existen cuatro de estas constantes a determinar, en lugar de dos como encontrábamos en los problemas que hemos visto hasta ahora.

En la parte de viga a la izquierda de la fuerza P tenemos el momento flector $M = (Pb/L)x$ para $0 < x < a$. La ecuación diferencial de la elástica es, pues,

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pb}{L}x \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

La primera integración produce

$$(2) \qquad EI\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{L}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

No tenemos datos definidos sobre la pendiente dy/dx en ningún punto de esta zona. Como la carga no está aplicada en el centro de la viga, no hay ninguna razón para suponer que la pendiente es nula en $x = L/2$. Sin embargo, podemos establecer que la pendiente de la viga bajo el punto de aplicación de la fuerza P está dada por

(3) $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_1$$

La siguiente integración de la ecuación (2) da

(4) $$EIy = \frac{Pb}{2L}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2$$

En el apoyo izquierdo, $y = 0$ cuando $x = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (4) hallamos inmediatamente que $C_2 = 0$. Hay que observar que no puede utilizarse la condición $y = 0$ para $x = L$ en (4), pues la ecuación (1) no es válida en esta región. Podemos expresar la flecha en el punto de aplicación de la fuerza P por

(5) $$EI(y)_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_1a$$

En la zona a la derecha de la fuerza P, la ecuación del momento flector es $M = (Pb/L)x - P(x - a)$ para $a < x < L$. Tendremos, pues,

(6) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pb}{L}x - P(x - a) \quad \text{para} \quad a < x < L$$

La primera integración de esta ecuación da

(7) $$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{L}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{P(x - a)^2}{2} + C^3$$

Aunque no podamos decir nada concreto sobre la pendiente en esta parte de la viga, podemos expresar su valor en el punto de aplicación de la fuerza P por

(8) $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2L} + C_3$$

Bajo la carga aislada P, la flecha dada por la ecuación (3) debe ser igual a la obtenida de la (8), por lo que los dos segundos miembros de estas ecuaciones han de ser iguales, y tendremos

$$\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = \frac{Pba^2}{2L} + C_3 \quad \text{y} \quad C_1 = C_3$$

Ahora puede integrarse la ecuación (7), obteniéndose

(9) $$EIy = \frac{Pb}{2L}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{P(x - a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

Podemos representar la flecha bajo la carga aislada por

(10) $$EI(y)_{x=a} = \frac{Pba^3}{6L} + C_3a + C_4$$

La flecha en $x = a$ dada por (5) debe ser igual a la obtenida de (10), por lo que los dos segundos miembros de esas ecuaciones han de ser iguales y tendremos $\frac{Pba^3}{6L} + C_1a = \frac{Pba^3}{6L} + C_3a + C_4$. Como $C_1 = C_3$, tenemos que $C_4 = 0$.

Ahora podemos sustituir la condición $y = 0$ cuando $x = L$ en la ecuación (9), con lo que se obtiene

$$0 = \frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} + C_3L \quad \text{y} \quad C_3 = \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)$$

De este modo se han determinado las cuatro constantes de integración. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (4) y (9) se halla

(4') $$EIy = \frac{Pb}{6L}[x^3 - (L^2 - b^2)x] \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

y

(9') $$EIy = \frac{Pb}{6L}[x^3 - \frac{L}{b}(x - a)^3 - (L^2 - b^2)x] \quad \text{para} \quad a < x < L$$

Para describir las flechas en la viga deformada son necesarias las dos ecuaciones. Cada una es válida solamente en la zona indicada y no es posible sustituir ambas por una ecuación única que contenga la variable x elevada a distintas potencias, que se cumpla en toda la longitud de la viga.

Hay que observar que las flechas indicadas por las ecuaciones (4') y (9') son válidas para cualquier punto de aplicación de la carga P, es decir, independientemente de si P está a la derecha o la izquierda del centro de la viga.

16. Considerar la viga simplemente apoyada del Problema 15. Si es de sección rectangular de 5×10 cm, y $P = 2.000$ kg, con $a = 1{,}20$ m y $b = 0{,}60$ m, determinar la flecha máxima. Se trata de acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2.

Como $a > b$, es evidente que la flecha máxima se producirá a la izquierda de la carga P. Tiene lugar en el punto en que la pendiente de la viga es nula.

Diferenciando (4'), la pendiente en esta zona está dada por $EI\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6L}[3x^2 - (L^2 - b^2)]$.

Igualando a cero la pendiente, hallamos $x = \sqrt{(L^2 - b^2)/3}$. Esta es la posición en que la flecha es máxima. Su valor se obtiene sustituyendo éste de x en la ecuación (4'). Por tanto, la flecha máxima es

$$EI(y)_{max} = -\frac{Pb\sqrt{3}}{27L}(L^2 - b^2)^{3/2}$$

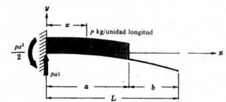
Para la sección rectangular, tenemos $I = 5(10^3)/12 = 417$ cm^4. Además, $P = 2.000$ kg, $b = 60$ cm, $L = 180$ cm y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Sustituyendo,

$$y_{max} = -\frac{2.000(60)\sqrt{3}}{2{,}1 \times 10^6(417)(27)(180)}(180^2 - 60^2)^{3/2} = -0{,}239 \text{ cm}$$

El signo negativo indica que en este punto la viga deformada está por debajo del eje x.

Aplicando la fórmula $\sigma = Mv/I$ se halla que la tensión máxima, que se produce bajo la carga P, es de 960 kg/cm^2, que es inferior al límite de proporcionalidad del acero, por lo que es válido el uso de las ecuaciones.

17. Determinar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo cargada con una carga uniformemente repartida de p kg por unidad de longitud sobre la parte de viga que se indica en la figura.



Primero tenemos que determinar las reacciones que ejerce el muro de empotramiento sobre la viga. Por la estática se halla con facilidad que son una fuerza vertical de magnitud pa kg, y un par de valor $pa^2/2$. Para describir el momento flector a lo largo de la viga son necesarias, también, dos ecuaciones.

Para un punto situado bajo la carga uniforme, a la distancia x del muro, el momento flector está dado por

$$M = pax - \frac{pa^2}{2} - \frac{px^2}{2}$$

Para obtener esta ecuación, se sustituye la parte de carga uniforme de la izquierda de la sección x por su resultante de px kg, dirigida hacia abajo a la distancia $x/2$ del muro. De acuerdo con el criterio de signos adoptado en el Capítulo 6, el par $pa^2/2$ produce flexión negativa. La ecuación diferencial de la parte cargada de viga se convierte en

(1) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = pax - \frac{pa^2}{2} - \frac{px^2}{2} \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

Integrando la primera vez, obtenemos

(2) $$EI\frac{dy}{dx} = pa(\frac{x^2}{2}) - \frac{pa^2}{2}x - \frac{p}{2}(\frac{x^3}{3}) + C_1$$

Como la barra está empotrada en el extremo derecho, $x = 0$, sabemos que la pendiente dy/dx debe ser nula allí. Sustituyendo esos valores en la ecuación (2), hallamos $C_1 = 0$. Integrando nuevamente se halla

(3) $$EIy = \frac{pa}{2}(\frac{x^3}{3}) - \frac{pa^2}{2}(\frac{x^2}{2}) - \frac{p}{6}(\frac{x^4}{4}) + C_2$$

La flecha y de la viga es nula en el muro, donde $x = 0$. Sustituyendo en (3), obtenemos $C_2 = 0$, por lo que la ecuación de la viga flexada en la zona cargada es

(4) $$EIy = \frac{pa}{6}x^3 - \frac{pa^2}{4}x^2 - \frac{p}{24}x^4$$

Según la ecuación (4) la flecha y en $x = a$ está dada por

(5) $$EI(y)_{x=a} = -pa^4/8$$

Además, por la ecuación (2), la pendiente dy/dx en $x = a$ vale

(6) $$EI(dy/dx)_{x=a} = -pa^3/6$$

En una sección cualquiera de la parte de viga no cargada, es decir, $a < x < L$, el momento flector es nulo, como se ve fácilmente considerando los momentos de las fuerzas situadas a su derecha, respecto a un eje por esta sección, perpendicular al plano del papel. Como no hay ninguna carga a la derecha, el momento es nulo en todos los puntos de esta zona. Así, pues, en ella tenemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{para} \quad a < x < L$$

Integrando una vez, tenemos

(7) $$EI\frac{dy}{dx} = C_3$$

La constante C_3 puede calcularse teniendo en cuenta que la pendiente dy/dx en $x = a$ es la misma para las zonas cargada y sin carga de la viga, por lo que el valor de la pendiente en este punto, dado por la ecuación para la zona cargada ha de ser igual al obtenido por la ecuación de la sin cargar. En la ecuación (6) se halló la pendiente en la zona cargada en $x = a$. Según la (7), la pendiente en la zona no cargada es una constante C_3. Igualando los segundos miembros de esas dos expresiones, tenemos $C_3 = -pa^3/6$. Por tanto, en la parte no cargada, la pendiente es

(7') $$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{pa^3}{6}$$

Integrando, obtenemos

(8) $$EIy = -\frac{pa^3}{6}x + C_4$$

Puede calcularse la constante C_4 teniendo en cuenta que en el punto $x = a$ la flecha y dada por la ecuación (5) debe ser igual a la obtenida por (8) para la zona no cargada. Igualando los segundos miembros de ambas ecuaciones en el punto común $x = a$, tenemos $C_4 = pa^4/24$.

Por tanto, para describir la elástica en las zonas cargada y sin cargar de la viga son necesarias dos ecuaciones, que son

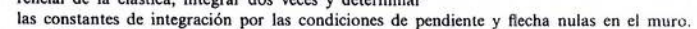
(4') $$EIy = \frac{pa}{6}x^3 - \frac{pa^2}{4}x^2 - \frac{p}{24}x^4 \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

(8') $$EIy = -\frac{pa^3}{6}x + \frac{pa^4}{24} \quad \text{para} \quad a < x < L$$

Observando la ecuación (7') se ve que la pendiente de la viga es constante en la región no cargada, por lo que en ella la viga flexada es recta.

18. Determinar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo cargada con una carga uniformemente repartida de p kg por unidad de longitud y una fuerza aislada P aplicada como se muestra en la figura.

La viga deformada tiene el aspecto que indica la línea gruesa. Se adopta el sistema de coordenadas x-y representado. Un procedimiento lógico de resolver este problema consiste en determinar las reacciones en el muro, escribir a continuación la ecuación diferencial de la elástica, integrar dos veces y determinar las constantes de integración por las condiciones de pendiente y flecha nulas en el muro.



Este procedimiento se ha aplicado ya en el Problema 2 cuando solo actúa en la viga la carga aislada, y en el 6 si solo actúa la uniformemente repartida. En la ecuación (3) del Problema 2 se halló que la flecha y debida solamente a la carga aislada es

(1) $$EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6}$$

En (3') del Problema 6 se vio que, debido solo a la carga uniforme, y vale

(2) $$EIy = -\frac{p}{24}(L - x)^4 - \frac{pL^3}{6}x + \frac{pL^4}{24}$$

Cuando estas dos cargas actúan simultáneamente puede hallarse el efecto resultante solo con sumar los efectos de cada una cuando lo hacen por separado. Es lo que se llama *método de superposición de efectos*, que es muy útil para determinar las flechas en las vigas sometidas a diversas cargas, como en este caso. En esencia, consiste en utilizar los resultados de problemas de flechas sencillos para hallar la solución de otros más complicados. No es, pues, un método independiente de determinación de deformaciones.

Por este método puede obtenerse la flecha en un punto cualquiera de una viga sometida a una combinación de cargas, mediante la suma de las flechas producidas en ese punto por cada una de las cargas al actuar por separado. Por tanto, la ecuación final de la elástica resultante de una combinación de cargas se obtiene sumando las elásticas de cada carga.

Para esta viga, la elástica final se obtiene simplemente sumando las ecuaciones (1) y (2). La flecha resultante y debida a las dos cargas está dada por

(3) $$EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} - \frac{p}{24}(L - x)^4 - \frac{pL^3}{6}x + \frac{pL^4}{24}$$

La pendiente dy/dx en un punto cualquiera de la viga se halla diferenciando ambos miembros de la ecuación (3) con respecto a x.

El método de la superposición de efectos es válido en todos los casos en que hay una relación lineal entre cada carga separada y la flecha que produce.

19. La viga en voladizo del Problema 18 es un perfil de ala ancha H 220 de 3 m de longitud. La carga aislada en el extremo libre es de 2.000 kg y la viga soporta además una carga uniforme de 600 kg/m, incluido su peso propio. Determinar la flecha en un punto a 2,50 m del muro de empotramiento, y la tensión máxima en la viga. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

Por la tabla del Capítulo 8 hallamos que el momento de inercia respecto al eje neutro de este perfil es 8.050 cm⁴. Con el sistema de coordenadas del Problema 18 queremos calcular la flecha y en $x = 2{,}50$ m $= 250$ cm. Tenemos, además, $L = 300$ cm, $P = 2.000$ kg, $p = 600$ kg/m $= 6$ kg/cm. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) del Problema 18, tenemos

$$2{,}1\times 10^6(8.050)\,[y]_{x=2{,}5\text{ m}} = -2.000(300)\frac{(250)^2}{2} + 2.000\frac{(250)^3}{6} - \frac{6}{24}(300-250)^4 - \frac{6(300)^3(250)}{6} + \frac{6(300)^4}{24}$$

que resuelta da $[y]_{x=2{,}5\text{ m}} = -1{,}08$ cm. El signo negativo indica que la viga deformada está por debajo del eje x, que corresponde con la forma original antes de la flexión.

El momento flector máximo se determina con facilidad, considerando los Problemas 1 y 2 del Capítulo 6. De acuerdo con el 1, debido a la carga aislada de 2.000 kg, el momento máximo en esta viga es 2.000(3) = 6.000 kg-m. Según el Problema 2, el producido por la carga uniforme sola tiene lugar en el muro y su valor es de 600(3)(1,50) = 2.700 kg-m. Para determinar las tensiones, también se puede utilizar el método de superposición, y de acuerdo con él, el momento flector resultante en el muro es la suma de los producidos por las diversas fuerzas por separado, es decir, que el máximo momento flector vale 6.000 + 2.700 = 8.700 kg-m. La tensión máxima por flexión se produce en las fibras extremas de la sección contigua al muro, en la que es máximo el momento, y está dada por $\sigma = Mv/I$. Sustituyendo,

$$\sigma_{max} = \frac{8.700(100)(11)}{8.050} = 1.190 \text{ kg/cm}^2$$

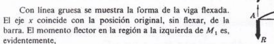
Como la tensión máxima es inferior al límite de proporcionalidad del acero, es válido el empleo de la ecuación de la elástica.

20. Determinar la elástica de la viga simplemente apoyada sometida al par M_1 de la Figura (a).

Fig. (a)

En el Problema 9 del Capítulo 6 se han estudiado las reacciones y la ecuación del momento flector para este tipo de carga. Según se demostró allí, las reacciones deben constituir un par, como se ve en la Fig. (b). Por la estática, tenemos

$$\Sigma M_A = M_1 - RL = 0 \quad \text{y} \quad R = M_1/L$$



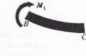
Con línea gruesa se muestra la forma de la viga flexada. El eje x coincide con la posición original, sin flexar, de la barra. El momento flector en la región a la izquierda de M_1 es, evidentemente,

(1) $\quad M = -Rx \quad$ para $\quad 0 < x < a$

Fig. (b)

mientras que a la derecha de M_1 el momento está dado por

(2) $\quad M = -Rx + M_1 \quad$ para $\quad a < x < L$



El par M_1 produce un momento flector positivo, pues si actuara él solo en la región BC produciría una flexión como la indicada en el croquis adjunto que, de acuerdo con el criterio de signos del Capítulo 6, constituye una flexión positiva, por cuyo motivo aparece M_1 con signo más en la ecuación (2).

La ecuación diferencial de la parte de la viga flexada a la izquierda de M_1 es

(3)
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

Integrando una vez, tenemos

$$EI\frac{dy}{dx} = -R\frac{x^2}{2} + C_1$$
(4)

Como no tenemos datos definidos sobre la pendiente en esta zona no podemos calcular C_1 inmediatamente, pero sí podemos decir que su valor en el punto de aplicación del par M_1 es

(5)
$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -R\frac{a^2}{2} + C_1$$

La integración de la ecuación (4) da

(6) $$EIy = -\frac{R}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2$$

Es evidente que la flecha y es nula en el apoyo izquierdo, donde $x = 0$. Sustituyendo este valor $(y)_{x=0} = 0$ en la ecuación (6), obtenemos $0 = 0 + 0 + C_2$, y $C_2 = 0$.

La ecuación diferencial de la parte de viga flexada a la derecha de M_1 es

(7) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Rx + M_1 \quad \text{para} \quad a < x < L$$

Integrando la primera vez, tenemos

(8) $$EI\frac{dy}{dx} = -R\frac{x^2}{2} + M_1x + C_3$$

Tampoco esta vez tenemos datos concretos de la pendiente en esta parte, pero podemos decir que en el punto de aplicación de M_1 tiene el valor

(9) $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -R\frac{a^2}{2} + M_1a + C_3$$

Pero la pendiente de la viga en el punto de aplicación de M_1 tiene un valor único, representado por los segundos miembros de las ecuaciones (5) y (9). Igualándolos, para indicar que esas dos expresiones de la pendiente en el punto común son equivalentes, tenemos

(10) $$-R\frac{a^2}{2} + C_1 = -R\frac{a^2}{2} + M_1a + C_3 \quad \text{y} \quad C_1 = M_1a + C_3$$

La segunda integración de la ecuación (8) produce

(11) $$EIy = -\frac{R}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + M_1\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

Es evidente que la flecha y es cero en el apoyo derecho, donde $x = L$. Sustituyendo este valor $(y)_{x=L} = 0$, en la ecuación (11) se obtiene

(12) $$0 = -\frac{RL^3}{6} + M_1\frac{L^2}{2} + C_3L + C_4$$

Para determinar todas las constantes de integración se necesita otra ecuación más. Es la que establece que la flecha de la viga en el punto de aplicación de M_1 es la misma, tanto si se calcula por la ecuación de la parte izquierda de la viga como por la de la derecha. Hay que recalcar que no existe motivo para suponer que la flecha es nula en el punto de aplicación del par. Sustituyendo $x = a$ en (6) y (11), e igualando los segundos miembros, obtenemos

(13) $$-\frac{Ra^3}{6} + C_1a = -\frac{Ra^3}{6} + M_1\frac{a^2}{2} + C_3a + C_4 \quad \text{y} \quad C_1a = M_1\frac{a^2}{2} + C_3a + C_4$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (10), (12) y (13), tenemos

$$C_1 = -\frac{M_1L}{3} + M_1a - \frac{M_1a^2}{2L}, \qquad C_3 = -\frac{M_1L}{3} - \frac{M_1a^2}{2L}, \qquad C_4 = \frac{M_1a^2}{2}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (6) y (11), obtenemos las dos necesarias para describir la elástica de la viga flexada:

(14) $$EIy = -\frac{M_1x^3}{6L} - \frac{M_1Lx}{3} + M_1ax - \frac{M_1a^2x}{2L} \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

y

(15) $$EIy = -\frac{M_1x^3}{6L} + \frac{M_1x^2}{2} - \frac{M_1Lx}{3} - \frac{M_1a^2x}{2L} + \frac{M_1a^2}{2} \quad \text{para} \quad a < x < L$$

En resumen, para definir el momento flector a lo largo de toda la viga eran necesarias dos ecuaciones, por lo que hay que integrar dos ecuaciones diferenciales de segundo orden y en la solución de cada una de ellas aparecen dos constantes de integración, en total cuatro, y habrá que aplicar cuatro condiciones de límites para determinarlas. Estas condiciones son:

a) $y = 0$ cuando $x = 0$.
b) $y = 0$ cuando $x = L$.
c) Cuando $x = a$, las flechas dadas por (*6*) y (*11*) son iguales.
d) Cuando $x = a$, las pendientes dadas por las ecuaciones (*4*) y (*8*) son iguales.

21. En la viga simplemente apoyada del Problema 20, tomar $M_1 = 250$ kg-m, $a = 3$ m y $b = 2$ m. La barra es de acero, con $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y tiene sección rectangular de 4 × 9 cm. Determinar:
a) La flecha en el punto de aplicación de M_1.
b) La flecha en $x = 1{,}5$ m.
c) La flecha en $x = 4$ m.

a) Para calcular la flecha en el punto de aplicación del par de 250 kg-m podemos utilizar las ecuaciones (*14*) o (*15*) del Problema 20, con $x = 3$ m. Como la (*14*) es más sencilla, será la que escojamos. Sustituyendo los valores $x = 3\text{ m} = 300\text{ cm}$, $a = 300\text{ cm}$, $L = 5\text{ m} = 500\text{ cm}$, $M_1 = 250\text{ kg-m} = 25.000\text{ kg-cm}$ e $I = (4)(9)^3/12 = 243\text{ cm}^4$, en la ecuación (*14*), tenemos

$$2{,}1 \times 10^6(243)\,[y]_{x=3\text{ m}} = -\frac{25.000(300)^3}{6(500)} - \frac{25.000(500)(300)}{3} + 25.000(300)^2 - \frac{25.000(300)^3}{2(500)}$$

y despejando, $[y]_{x=3\text{ m}} = 0{,}194$ cm.

b) Para calcular la flecha en $x = 1{,}5$ m se puede utilizar la ecuación (*14*) del Problema 20. Sustituyendo en ella $x = 1{,}5\text{ m} = 150\text{ cm}$, $a = 300$ cm, $L = 500$ cm, $M_1 = 25.000$ kg-cm e $I = 243\text{ cm}^4$, tenemos

$$2{,}1 \times 10^6(243)\,[y]_{x=1{,}5} = \frac{25.000(150)^3}{6(500)} \quad \frac{25.000(500)(150)}{3} + 25.000(300)(150) - \frac{25.000(300)^2(150)}{2(500)}$$

y despejando, $[y]_{x=1{,}5\text{ m}} = 0{,}263$ cm.

c) Para calcular la flecha en $x = 4$ m podemos usar la ecuación (*15*) del Problema 20. Sustituyendo en ella $x = 4\text{ m} = 400\text{ cm}$, $a = 300$ cm, $L = 500$ cm, $M_1 = 25.000$ kg-cm e $I = 243\text{ cm}^4$, se halla

$$2{,}1 \times 10^6(243)[y]_{x=4\text{ m}} = -\frac{25.000(400)^3}{6(500)} + \frac{25.000(400)^2}{2} - \frac{25.000(500)(400)}{3} - \frac{25.000(300)^2(400)}{2(500)} + \frac{25.000(300)^2}{2}$$

y despejando, $[y]_{x=4\text{ m}} = 0{,}049$ cm.

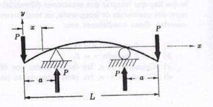
En el Problema 9 del Capítulo 6 se determinó ya el diagrama del momento flector de esta viga. Se vio que el máximo momento es de 150 kg-m en la sección inmediatamente a la izquierda del par aplicado. La tensión máxima en la viga se produce en las fibras extremas de esta sección y está dada por

$$\sigma = \frac{Mv}{I}$$

$$\sigma_{max} = \frac{150(100)(4{,}5)}{243} = 277\text{ kg/cm}^2$$

Como este valor es inferior al límite de proporcionalidad del acero, era admisible el uso de las ecuaciones de la flecha.

22. Determinar la ecuación de la elástica para la viga con extremos volados, cargada con dos fuerzas iguales, representada en la figura.



Se adopta el sistema de coordenadas x-y representado, con el eje x que coincide con la posición primitiva de la barra, sin flexar. El hecho de flexar el extremo izquierdo de la barra desde el sistema de coordenadas no presenta nuevas dificultades. Por la simetría resulta evidente que cada apoyo ejerce sobre la viga una fuerza P.

El momento flector en la parte volada de la izquierda está dado por

$$M = -Px \qquad \text{para} \qquad 0 < x < a$$

y la ecuación diferencial de la viga deformada es, en esta zona,

(1) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Px \qquad \text{para} \qquad 0 < x < a$$

La primera integración de esta ecuación produce

(2) $$EI\frac{dy}{dx} = -P\frac{x^2}{2} + C_1$$

En esta región no conocemos nada de la pendiente dy/dx. En particular, debe observarse que no existe justificación para suponer que sea nula en el punto de apoyo, $x = a$. Podemos expresar la pendiente en él por la notación

(3) $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -P\frac{a^2}{2} + C_1$$

La siguiente integración da

(4) $$EIy = -\frac{P}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2$$

Como la viga está articulada en el apoyo, sabemos que la flecha en él es 0, es decir, que $(y)_{x=a} = 0$. Sustituyendo $y = 0$ cuando $x = a$ en la ecuación (4), hallamos

(5) $$0 = -\frac{Pa^3}{6} + C_1a + C_2$$

El momento flector en la parte central de la viga, entre apoyos, es $M = -Pa$, y la ecuación diferencial de la viga flexada en esta parte central,

(6) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Pa \qquad \text{para} \qquad a < x < (L - a)$$

Integrando, obtenemos

(7) $$EI\frac{dy}{dx} = -Pax + C_3$$

Por la simetría de cargas resulta evidente que la pendiente dy/dx ha de ser nula en el punto medio de la barra. Por tanto, $(dy/dx)_{x=L/2} = 0$, y sustituyendo estos valores de x y dy/dx en (7), se halla

(8) $$0 = -Pa\frac{L}{2} + C_3 \qquad \text{y} \qquad C_3 = \frac{PaL}{2}$$

Además, por la ecuación (7) podemos decir que la pendiente de la viga en el apoyo izquierdo, $x = a$, se obtiene sustituyendo $x = a$ en dicha ecuación, lo que da

(9) $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -Pa^2 + \frac{PaL}{2}$$

Pero la pendiente dy/dx obtenida por esta ecuación debe ser igual a la dada por la (3), pues la barra flexada ha de tener en ese punto la misma pendiente, independientemente de la ecuación que se considere. Igualando los segundos miembros de (3) y (9), tenemos

(10) $$-\frac{Pa^2}{2} + C_1 = -Pa^2 + \frac{PaL}{2}.$$

y

(11) $$C_1 = \frac{Pa^2}{2} + \frac{PaL}{2}$$

Sustituyendo este valor de C_1 en la ecuación (5), hallamos

(12) $$0 = -\frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_2 \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2}$$

La siguiente integración de la ecuación (7) produce

(13) $$EIy = -Pa\frac{x^2}{2} + \frac{PaL}{2}x + C_4$$

También ahora podemos decir que la flecha y es nula en el apoyo izquierdo, donde $x = a$. Aunque esta misma condición se utilizó ya para obtener la ecuación (5), no hay ninguna razón para no poderla usar de nuevo. En realidad, su empleo es esencial para hallar la constante C_4 de la ecuación (13) Sustituyendo $(y)_{x=a} = 0$ en (13), obtenemos

(14) $$0 = -\frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_4 \quad \text{y} \quad C_4 = \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2}$$

Por tanto, para definir el momento flector en las zonas izquierda y central de la viga, se necesitaron dos ecuaciones. Cada una de ellas se usó en unión de la ecuación diferencial de segundo orden que describe la viga flexada, por lo que al resolver cada una de estas dos ecuaciones aparecieron dos constantes de integración. Hubo que utilizar, para determinar esas cuatro constantes, cuatro condiciones concernientes a pendientes y flechas. Esas condiciones fueron:

(a) Cuando $x = a$, $y = 0$ para la parte volada de la viga.
(b) Cuando $x = a$, $y = 0$ para la parte central de la viga.
(c) Cuando $x = L/2$, $dy/dx = 0$ para la parte central de la viga.
(d) Cuando $x = a$, la pendiente dy/dx es la misma para la elástica a uno y otro lado del apoyo.

Finalmente, pueden escribirse las ecuaciones de la elástica en las formas

(15) $$EIy = -\frac{P}{6}x^3 - \frac{Pa^2x}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2} \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

y

(16) $$EIy = -\frac{Pax^2}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2} \quad \text{para} \quad a < x < (L - a)$$

Por simetría, no es necesario escribir la ecuación de la elástica en la parte volada de la derecha.

23. En la viga con extremos volados del Problema 22, cada fuerza P es de 2.000 kg; la distancia a es de 0,90 m y la longitud L de 4,80 m. La barra es de acero, de sección circular de 10 cm de diámetro. Determinar la flecha bajo cada carga P y la del centro de la viga. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2.

El momento de inercia está dado por $I = \frac{\pi}{64}(10)^4 = 491$ cm^4 según el Problema 11 del Capítulo 7. Además, tenemos que $a = 0{,}90$ m $= 90$ cm, $L = 4{,}80$ m $= 480$ cm. La flecha en cualquier punto de la parte volada de la izquierda está dada por la ecuación (15) del Problema 22. Bajo la carga aislada P, es $x = 0$, y sustituyendo en (15), obtenemos

$$2{,}1 \times 10^6(491)\,[y]_{x=0} = \frac{2(2.000)(90)^3}{3} - \frac{2.000(90)^2(480)}{2} \quad \text{y} \quad [y]_{x=0} = -2{,}83 \text{ cm}$$

La flecha en cualquier punto de la parte central de la viga, entre los apoyos, está dada por la ecuación (16) del Problema 22. En el centro tenemos $x = 2{,}40$ m $= 240$ cm y, como antes, $a = 90$ cm, $L = 480$ cm y $P = 2.000$ kg. Sustituyendo en la ecuación (16), hallamos

$$2{,}1 \times 10^6(491)\,[y]_{x=2,4} = -\frac{2.000(90)(240)^2}{2} + \frac{2.000(90)(480)(240)}{2} + \frac{2.000(90)^3}{2} - \frac{2.000(90)^2(480}{2}$$

y despejando, $[y]_{x=2,4} = 1{,}96$ cm.

La tensión máxima se produce en las fibras extremas de la barra en todos los puntos entre los apoyos, pues el momento flector tiene el valor constante de 2.000(0,90) = 1.800 kg-m, en toda esa zona. Esta tensión máxima está dada por

$$\sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{1.800(100)(5)}{491} = 1.830 \text{ kg/cm}^2$$

que es menor que el límite de proporcionalidad del material.

24. Determinar la flecha de la viga con un extremo volado, sometida a una carga uniforme de p kg por unidad de longitud y sustentada como se muestra en la figura.

En el Problema 13 del Capítulo 6 se estudió la determinación de las reacciones y del diagrama de momentos de esta viga. Como allí, podemos sustituir toda la carga repartida por su resultante de pL kg, que actúa en el centro de la longitud L. Tomando momentos respecto a la reacción derecha, tenemos

$$\Sigma M_C = R_1 b - \frac{pL^2}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad R_1 = \frac{pL^2}{2b}$$

Sumando las fuerzas verticales, hallamos $\Sigma F_v = \frac{pL^2}{2b} + R_2 - pL = 0$ y $R_2 = pL - \frac{pL^2}{2b}$.

La ecuación del momento flector en la región volada de la izquierda es $M = -\frac{px^2}{2}$ para $0 < x < a$, por lo que la ecuación diferencial de la viga flexada en esta región es

(1) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{px^2}{2} \qquad \text{para} \qquad 0 < x < a$$

Dos integraciones sucesivas dan

(2) $$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

(3) $$EIy = -\frac{p}{6}\left(\frac{x^4}{4}\right) + C_1 x + C_2$$

La ecuación del momento flector en la zona entre apoyos es $M = -\frac{px^2}{2} + R_1(x - a)$, por lo que la ecuación diferencial de la viga flexada es, en esta zona,

(4) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{px^2}{2} + \frac{pL^2}{2b}(x - a) \qquad \text{para} \qquad a < x < L$$

Dos integraciones de esta ecuación producen

(5) $$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{pL^2}{2b}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right] + C_3$$

(6) $$EIy = -\frac{p}{6}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{pL^2}{4b}\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right] + C_3 x + C_4$$

Como hemos partido de las ecuaciones diferenciales de segundo orden (1) y (4) y de cada una de ellas aparecen dos constantes de integración, hemos encontrado cuatro constantes, C_1, C_2, C_3 y C_4, que hemos de calcular en función de las condiciones de flechas y pendientes que conocemos. Estas son:

(*a*) Cuando $x = a$, $y = 0$ en la parte volada.
(*b*) Cuando $x = a$, $y = 0$ en la parte entre apoyos.
(*c*) Cuando $x = L$, $y = 0$ en la parte entre apoyos.
(*d*) Cuando $x = a$, la pendiente dada por la ecuación (*2*) ha de ser igual a la obtenida de (*5*), por lo que los segundos miembros de estas dos ecuaciones deben ser iguales.

Sustituyendo la condición (*a*) en la ecuación (*3*), obtenemos

$$(7) \qquad 0 = -pa^4/24 + C_1a + C_2$$

Sustituyendo la condición (*b*) en la ecuación (*6*), hallamos

$$(8) \qquad 0 = -pa^4/24 + C_3a + C_4$$

Sustituyendo la condición (*c*) en la ecuación (*6*), tenemos

$$(9) \qquad 0 = -pL^4/24 + pL^2b^2/12 + C_3L + C_4$$

Finalmente, igualando las pendientes en la reacción izquierda, sustituyendo $x = a$ en los segundos miembros de las ecuaciones (*2*) y (*5*), obtenemos

$$(10) \qquad -pa^3/6 + C_1 = -pa^3/6 + C_3$$

Obsérvese que no hay razón para suponer que la pendiente es nula en el apoyo izquierdo, $x = a$.

Ahora podemos resolver ya el sistema formado por estas cuatro últimas ecuaciones (*7*), (*8*), (*9*) y (*10*) y hallar las incógnitas C_1, C_2, C_3 y C_4. Se halla que

$$(11) \qquad C_1 = C_3 = \frac{p(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{pL^2b}{12}$$

$$(12) \qquad C_2 = C_4 = \frac{pa^4}{24} - \frac{p(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{pL^2ab}{12}$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en (*3*) y (*6*), se hallan las dos ecuaciones que describen la elástica de la viga. Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma final

$$(3') \qquad EIy = -\frac{px^4}{24} + \frac{p(L^4 - a^4)x}{24b} - \frac{pL^2bx}{12} + \frac{pa^4}{24} - \frac{p(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{pL^2ab}{12} \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

$$(6') \qquad EIy = -\frac{px^4}{24} + \frac{pL^2(x-a)^3}{12b} + \frac{p(L^4 - a^4)x}{24b} - \frac{pL^2bx}{12} + \frac{pa^4}{24} - \frac{p(L^4 - a^4)a}{24b} + \frac{pL^2ab}{12} \quad \text{para} \quad a < x < L$$

25. Para la viga con un extremo volado del Problema 24, considerar que la carga uniforme es de 160 kg/m, $a = 1$ m y $b = 4$ m. La barra es de sección rectangular, de 9 × 12 cm. Determinar la flecha máxima. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm².

En el Problema 24 se muestra una representación aproximada de la viga flexada. El punto en el que se produce la flecha máxima no es evidente, pues puede estar en el extremo izquierdo de la viga, en que $x = 0$, o en algún punto intermedio entre los apoyos. Si tiene lugar entre los apoyos no será normal que sea en el punto medio, pues no existe simetría en el sistema, pero podremos determinar la situación hallando el punto en que es cero la pendiente de la viga. En cualquier punto de esta región entre apoyos la pendiente está dada por la ecuación (*5*) del Problema 24, y haciendo igual a cero el valor de dy/dx dado por esta ecuación y tomando el valor de C_3 dado por la ecuación (*11*) hallamos

$$0 = -\frac{px^3}{6} + \frac{pL^2(x-a)^2}{4b} + \frac{p(L^4 - a^4)}{24b} - \frac{pL^2b}{12}$$

Sustituyendo $p = 160$ kg/m $= 1{,}6$ kg/cm, $a = 1$ m $= 100$ cm, $b = 4$ m $= 400$ cm y $L = 500$ cm, tenemos

$$0 = -\frac{1{,}6x^3}{6} + \frac{1{,}6(500)^2(x-100)^2}{4(400)} + \frac{1{,}6[(500)^4 - (100)^4]}{24(400)} - \frac{1{,}6(500)^2(400)}{12}$$

Resolviendo la ecuación por tanteos, $x = 305$ cm = 3,05 m, que es el punto en que la pendiente es nula.

La flecha en $x = 305$ cm puede hallarse sustituyendo este valor en la ecuación (6′) del Problema 24, obteniéndose la relación

$$(2{,}1 \times 10^6)\frac{1}{12}(9)(12)^3[y]_{x=305} = -\frac{1{,}6(305)^4}{24} + \frac{1{,}6(500)^2(305-100)^3}{12(400)} + \frac{1{,}6[(500)^4-(100)^4](305)}{24(400)}$$

$$\frac{-1{,}6(500)^2(400)(305)}{12} + \frac{1{,}6(100)^4}{24} - \frac{1{,}6[(500)^4-(100)^4](100)}{24(400)} + \frac{1{,}6(500)^2(100)(400)}{12}$$

y despejando, $[y]_{x=305} = -0{,}17$ cm.

El método de cálculo consistente en igualar a cero la primera derivada dy/dx para determinar la posición del punto en que el valor de la función es máximo no sirve para determinar una flecha máxima que pueda existir en un punto como $x = 0$, por lo que habrá que hallar el valor de la flecha en él. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (3′) del Problema 24, hallamos

$$(2{,}1 \times 10^6)\frac{1}{12}(9)(12)^3[y]_{x=0} = \frac{1{,}6(100)^4}{24} - \frac{1{,}6[(500)^4-(100)^4](100)}{24(400)} + \frac{1{,}6(500)^2(100)(400)}{12}$$

y despejando, $[y]_{x=0} = +0{,}11$ cm.

Por tanto, la forma de la elástica supuesta en la figura del Problema 24 es incorrecta en la zona volada para esta viga particular. En la realidad, en esta zona la viga flexa hacia arriba; para otros valores de a y b sería posible que lo hiciera en la forma representada.

La flecha máxima de la viga es, pues, de 0,17 cm hacia abajo en el punto a 3,05 m del extremo izquierdo

En el Problema 13 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de momentos flectores de esta viga y se vio que el máximo es de 280 kg-m. La tensión máxima por flexión está dada por

$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} = \frac{280(100)(6)}{\frac{1}{12}(9)(12)^3} = 130 \text{ kg/cm}^2$$

Por consiguiente, está justificado el empleo de las ecuaciones de la elástica.

Es de observar que la sección en que la tensión por flexión es máxima no es aquella en que es mayor la flecha.

PROBLEMAS PROPUESTOS

26. Considerar la viga en voladizo cargada como se ve en el Problema 2. La carga P es de 2.000 kg, $L = 3{,}5$ m, el momento de inercia de la sección vale 9.700 cm^4, y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Hallar la flecha máxima de la viga. *Sol.* $-1{,}40$ cm

27. Considerar la viga en voladizo, cargada uniformemente, del Problema 6. La carga total es de 2.000 kg, la longitud de la viga 3 m y el momento de inercia de la sección 7.800 cm^4. Determinar la flecha y la pendiente en el extremo libre. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}41$ cm, $-0{,}0018$ rad

28. Se utiliza un perfil H 180 como viga simplemente apoyada. Tiene 4 m de longitud y soporta una carga uniformemente repartida de 6.000 kg. Determinar la flecha máxima. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Hallar también la tensión máxima en la viga. *Sol.* $-0{,}62$ cm, 704 kg/cm^2

29. Considerar la viga simplemente apoyada sometida a una carga en el centro P, estudiada en el Problema 10. La longitud de la viga es de 6 m, la fuerza P de 12.000 kg, $I = 33.750$ cm^4 y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. Determinar la flecha máxima. *Sol.* $-0{,}762$ cm

30. Considerar la viga simplemente apoyada cargada como en el Problema 15. La longitud es de 6 m, $a = 4{,}50$ m, la carga $P = 500$ kg e $I = 6.000$ cm^4. Determinar la flecha en el centro de la viga. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2.
Sol. -0.123 cm

31. Con referencia a la Fig. (*a*), determinar la flecha en cada punto de la viga en voladizo sometida al momento M_1 representado. *Sol.* $EIy = -M_1x^2/2$

32. La viga en voladizo del Problema 31 es de sección circular de 15 cm de diámetro. La longitud es de 3 m y el momento aplicado de 600 kg-m. Determinar la flecha máxima. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}517$ cm

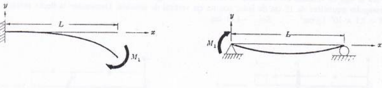


Fig. (*a*) Prob. 31 Fig. (*b*) Prob. 33

33. Con referencia a la Fig. (*b*), determinar la ecuación de la elástica para una viga simplemente apoyada sometida a un par M_1 en el extremo izquierdo de la barra, como se indica. *Sol.* $EIy = -\dfrac{M_1}{6L}x^3 + \dfrac{M_1}{2}x^2 - \dfrac{M_1L}{3}x$

34. La viga descrita en el Problema 33 es un perfil H 180. La longitud es de 3 m y el momento aplicado de 3.600 kg-m. Determinar la situación del punto de máxima flecha de la viga y el valor de dicha flecha.
Sol. $-0{,}259$ cm y se produce a 1,27 m del extremo izquierdo

35. Determinar la ecuación de la elástica de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida de p kg/unidad de longitud, y a una carga aislada P aplicada en el centro, como se muestra en la Figura (*c*).
Sol. $EIy = \dfrac{pLx^3}{12} - \dfrac{px^4}{24} - \dfrac{pL^3x}{24} + \dfrac{Px^3}{12} - \dfrac{PL^2x}{16}$ para $0 < x < \dfrac{L}{2}$

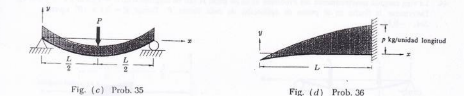


Fig. (*c*) Prob. 35 Fig. (*d*) Prob. 36

36. Con referencia a la Fig. (*d*), hallar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo sometida a la carga variable representada. *Sol.* $EIy = -\dfrac{px^5}{120L} + \dfrac{pL^3x}{24} - \dfrac{pL^4}{30}$

37. La sección de la viga en voladizo del Problema 36 es rectangular, de 6 × 9 cm. La barra es de aluminio, para el cual $E = 0{,}7 \times 10^6$ kg/cm^2 y la longitud de 0,90 m. Determinar la máxima intensidad de carga admisible si la flecha no debe sobrepasar 0,4 cm, ni la tensión exceder de 560 kg/cm^2. *Sol.* $p = 3.360$ kg/m

38. Con referencia a la Fig. (*e*) adjunta, determinar la ecuación de la elástica de la viga simplemente apoyada que soporta la carga de intensidad variable.
Sol. $EIy = \dfrac{pL}{2}\left(-\dfrac{x^5}{60L^2} + \dfrac{x^3}{18} - \dfrac{7L^2x}{180}\right)$

y
p kg/unidad longitud
x

Fig. (*e*) Prob. 38

39. La sección de la viga del Problema 38 tiene un momento de inercia de 6.000 cm^4, su longitud es de 2,50 m y la intensidad de la carga en el apoyo derecho de 4.000 kg/m. Determinar la flecha en un punto a 60 cm del apoyo derecho. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}058$ cm

40. Determinar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo cargada con la fuerza P indicada en la Figura (*f*).

Sol. $EIy = -\dfrac{P}{6}(a-x)^3 - \dfrac{Pa^2}{2}x + \dfrac{Pa^3}{6}$ para $0 < x < a$; $EIy = -\dfrac{Pa^2}{2}x + \dfrac{Pa^3}{6}$ para $a < x < L$

41. Para la viga en voladizo del Problema 40 tomar $P = 500$ kg, $a = 1{,}80$ m y $b = 1{,}20$ m. La viga es de sección triangular equilátera de 15 cm de lado, con un eje vertical de simetría. Determinar la flecha máxima. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-1{,}01$ cm

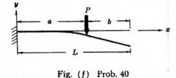


Fig. (*f*) Prob. 40

Fig. (*g*) Prob. 42

42. Con referencia a la Fig. (*g*), hallar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo cargada por el par M_1.

Sol. $EIy = -\dfrac{M_1x^2}{2}$ para $0 < x < a$; $EIy = -M_1ax + \dfrac{M_1a^2}{2}$ para $a < x < L$

43. Con referencia a la Fig. (*h*), que representa una viga simplemente apoyada sometida a dos cargas situadas simétricamente, determinar la elástica de la viga deformada.

Sol. $EIy = \dfrac{Px^3}{6} + \left(\dfrac{Pa^2}{2} - \dfrac{PaL}{2}\right)x$ para $0 < x < a$; $EIy = \dfrac{Pax^2}{2} - \dfrac{PaLx}{2} + \dfrac{Pa^3}{6}$ para $a < x < (a+b)$

44. La viga cargada simétricamente del Problema 43 es un perfil H 160 de longitud 6 m, $a = 1{,}20$ m y $P = 1.500$ kg. Determinar la flecha en el punto de aplicación de cada fuerza P. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}86$ cm

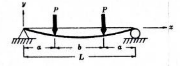


Fig. (*h*) Prob. 43

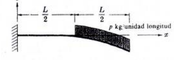


Fig. (*i*) Prob. 45

45. Con referencia a la Fig. (*i*) de arriba, hallar la ecuación de la elástica de la viga en voladizo cargada en la mitad de su longitud con una carga uniformemente repartida de p kg por unidad de longitud. Utilizando esta ecuación, determinar la flecha máxima.

Sol. $EIy = \dfrac{pLx^3}{12} - \dfrac{3pL^2x^2}{16}$ para $0 < x < \dfrac{L}{2}$

$EIy = -\dfrac{p(L-x)^4}{24} - \dfrac{7pL^3x}{48} + \dfrac{15pL^4}{384}$ para $\dfrac{L}{2} < x < L$ $\quad \Delta_{max} = \dfrac{41}{384}\left(\dfrac{pL^4}{EI}\right)$

46. La viga en voladizo del Problema 45 es un perfil H 200 de longitud 4 m, y la carga uniforme es de 1.200 kg/m. Determinar la flecha máxima. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-2{,}62$ cm

47. Con referencia a la Fig. (*j*), que representa una viga simplemente apoyada con los extremos volados, sometida a una carga uniforme, hallar la ecuación de la elástica. Tomar un origen de coordenadas a la altura de los apoyos.

Sol. $$EIy = -\frac{px^4}{24} + \frac{pL^3x}{48} - \frac{pLx}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 + \frac{pa^4}{24} - \frac{paL^3}{48} + \frac{pLa}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

$$EIy = -\frac{px^4}{24} + \frac{pL(x-a)^3}{12} + \frac{pL^3x}{48} - \frac{pLx}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 + \frac{pa^4}{24} - \frac{paL^3}{48} + \frac{pLa}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 \quad \text{para } a < x < (a+b)$$

48. La viga simétricamente sustentada del Problema 47 tiene 9 m de longitud y la distancia entre apoyos es de 6 m. El momento de inercia de la sección vale 16.000 cm^4 y la carga uniforme es de 1.200 kg/m. Hallar la flecha en el centro de la viga. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}422$ cm

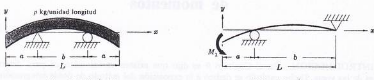


Fig. (*j*) Prob. 47

Fig. (*k*) Prob. 49

49. Con referencia a la Fig. (*k*), que representa una viga con un extremo volado, sometida a un par M_1, determinar la ecuación de la elástica de la viga deformada. Tomar el origen de coordenadas al nivel de los apoyos.

Sol. $$EIy = -\frac{M_1x^2}{2} + M_1ax + \frac{M_1(L-a)x}{3} - \frac{M_1a^2}{2} - \frac{M_1a(L-a)}{3} \quad \text{para} \quad 0 < x < a$$

$$EIy = -\frac{M_1(L-x)^3}{6(L-a)} - \frac{M_1x(L-a)}{6} + \frac{M_1L(L-a)}{6} \quad \text{para} \quad a < x < L$$

50. La viga del Problema 49 es un perfil H 220 de 3 m de longitud. Los apoyos están separados de modo que $a = 70$ cm, y el momento aplicado M_1 vale 8.000 kg-m. Determinar la flecha en el punto de aplicación del momento. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2. *Sol.* $-0{,}37$ cm

CAPITULO 10

Deformación de vigas. Método del área de momentos

INTRODUCCION. En el Capítulo 9 se dijo que existen varios métodos para determinar las flechas de las vigas. Dicho capítulo se dedicó a la exposición del método de doble integración y en éste se estudiará en detalle un segundo procedimiento, llamado del área de momentos. Puede considerarse que constituye una alternativa del antes mencionado.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. Un sistema dado de cargas actúa sobre una viga. Se conocen las dimensiones de la viga y el módulo de elasticidad. Se quiere determinar la flecha en un punto cualquiera de la viga deformada desde su posición original.

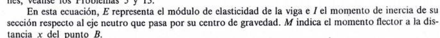
PRIMER TEOREMA DEL AREA DE MOMENTOS. En la figura que se acompaña, AB representa una parte de la elástica de una viga, y el diagrama rayado de debajo de AB, la parte correspondiente del diagrama de momentos flectores. En el Capítulo 6 se vio la manera de dibujarle para diversos tipos de carga. En cada uno de los puntos A y B se han trazado las tangentes a la elástica.

El primer teorema del área de momentos dice: El ángulo de las tangentes en A y B es igual al área del diagrama de momentos flectores entre esos dos puntos, divididos por el producto EI.

Si θ representa el ángulo de las tangentes, como puede verse en la figura, este teorema puede expresarse por la ecuación

$$\theta = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI}$$

En el Problema 1 se deduce este teorema. Para aplicaciones, véanse los Problemas 5 y 13.


En esta ecuación, E representa el módulo de elasticidad de la viga e I el momento de inercia de su sección respecto al eje neutro que pasa por su centro de gravedad. M indica el momento flector a la distancia x del punto B.

SEGUNDO TEOREMA DEL AREA DE MOMENTOS. Consideremos la distancia en vertical entre el punto B de la elástica, representado más arriba, y la tangente a esta curva trazada por A. En la figura se ha representado esta distancia por Δ.

El segundo teorema del área de momentos dice: La distancia en vertical entre el punto B de una

elástica y la tangente trazada a la curva por A es igual al momento respecto a la vertical por B del área del diagrama de momentos flectores entre A y B divididos por EI.

Este teorema se puede expresar por la ecuación

$$\Delta = \int_A^B \frac{Mx\,dx}{EI}$$

Se deduce en el Problema 2. Para aplicaciones, véanse los Problemas 4, 6-12, 14-17.

CRITERIOS DE SIGNOS. Al utilizar el primer teorema se consideran positivas las áreas correspondientes a un diagrama de momentos positivo, y las que provienen de uno negativo se toman negativas. Con referencia a la elástica AB anterior y sus tangentes, un área positiva implica que la tangente en B forma un ángulo positivo, o sea, en sentido contrario a las agujas del reloj con la tangente trazada por A. En el segundo teorema se consideran positivos los momentos de las áreas de los diagramas de momentos flectores positivos y los productos positivos de áreas y brazos dan origen a flechas positivas. Se toman como positivas las flechas en las que el punto B está *encima* de la tangente trazada por el punto A. Hay que observar que este criterio de signos no tiene relación con el utilizado en el método de la doble integración.

PROCESO DEL AREA DE MOMENTOS. La determinación de la flecha en un punto dado de una viga cargada se hace siguiendo el proceso siguiente.

1. Se determinan las reacciones de la viga. En el caso de una viga en voladizo se puede suprimir frecuentemente este paso.

2. Se dibuja una curva elástica aproximada. Debe estar de acuerdo con las condiciones conocidas en los apoyos, tales como pendiente nula o flecha nula.

3. Se traza el diagrama de momentos flectores de la viga. En el Capítulo 6 se estudió el modo de hacerlo. Frecuentemente conviene trazar el diagrama de momentos *por partes*, como se vio en los Problemas 14 y 15 del Capítulo 6. En realidad, hay que utilizar el diagrama M/EI en los dos teoremas anteriores, pero para las vigas de sección constante, dicho diagrama tiene la misma forma que el de momentos flectores ordinario, excepto que cada ordenada está dividida por EI. Por ello, en el caso de vigas de sección constante es posible trabajar directamente con el diagrama de momentos flectores y dividir luego las áreas calculadas, o áreas de momentos, por EI o, lo que es lo mismo, multiplicar por EI los ángulos o flechas cuando se usan áreas o áreas de momentos del diagrama ordinario. Este es, de hecho, el procedimiento comúnmente seguido, y es el que utilizaremos en todos los ejemplos aclaratorios de este capítulo.

4. Se eligen puntos A y B apropiados y se traza una tangente en uno de ellos, por ejemplo, en A, a la elástica supuesta.

5. Se calcula el desplazamiento del punto B desde la tangente en A por el segundo teorema del área de momentos.

En algunos casos sencillos, especialmente los referentes a vigas en voladizo, este desplazamiento entre B y la tangente en A puede ser la flecha buscada. En muchos casos, sin embargo, será necesario aplicar el segundo teorema del área de momentos a otro punto de la viga y examinar la relación geométrica entre los dos valores hallados para obtener la flecha. No se puede dar ninguna norma sobre esta fase del trabajo. En los Problemas 15, 16, 17, se pueden hallar ejemplos de este método.

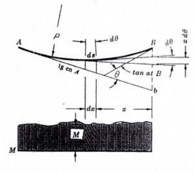
COMPARACION DE LOS METODOS DEL AREA DE MOMENTOS Y DE LA DOBLE INTEGRACION. Si solo se quiere hallar la flecha de un punto de una viga, generalmente es más conveniente el método del área de momentos que el de doble integración. Por el contrario, si se quiere obtener la ecuación de la elástica de toda la viga, en general no hay método superior al de doble integración. En el caso particular de vigas en voladizo suele ser preferible el del área de momentos. Sin embargo, en cada caso particular la elección de uno u otro método es cuestión personal. Algunas veces hay una ligera ventaja de uno sobre el otro, pero casi siempre la elección es solo motivo de preferencia.

HIPOTESIS Y LIMITACIONES. Como se explica en los Problemas 1 y 2, se puede deducir el método del área de momentos, de la ecuación que liga el momento flector en un punto de una viga y la curvatura del eje neutro en ese mismo punto. Es la misma ecuación que se usó para el procedimiento de la doble integración, por lo que ambos métodos están basados en la misma relación fundamental y, por tanto, estarán sometidos a las mismas limitaciones. Estas están relacionadas en la correspondiente sección del Capítulo 9.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir el primer teorema del área de momentos.

Sea, en la figura, AB una parte de la elástica de una por M. Por el Problema 1 del Capítulo 8 tenemos presentaremos por ρ el radio de curvatura de este elemento, y el momento flector en este punto de la viga por M. Por el Problema 1 del Capítulo 8 tenemos la relación, dada por la ecuación (7),



$$(1) \qquad M = \frac{EI}{\rho}$$

donde E representa el módulo de elasticidad del material e I el momento de inercia de la sección de la viga respecto a su eje neutro.

La figura inmediatamente debajo de AB representa el diagrama de momentos flectores correspondiente a la longitud AB de la viga. En el Capítulo 6 se estudió su trazado.

El elemento de longitud ds subtiende un ángulo $d\theta$, medido respecto al centro de curvatura del elemento ds, como se ve en la figura. Es evidente que $ds = \rho\, d\theta$, de donde $\rho = ds/d\theta$. Sustituyendo en la ecuación (1),

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

Como solo consideramos deformaciones laterales muy pequeñas, podemos sustituir ds por su proyección horizontal dx, por lo que

$$d\theta = \frac{M\, dx}{EI}$$

Este ángulo $d\theta$ puede considerarse también como el ángulo entre las tangentes a la elástica en los extremos del elemento de longitud ds, como puede verse, ya que los lados de esos dos ángulos son perpendiculares. Ahora,

puede hallarse el ángulo θ entre las tangentes a la elástica en los puntos A y B sumando todos esos ángulos $d\theta$, esto es,

$$\theta = \int d\theta = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI}$$

Es el llamado primer teorema del área de momentos, que se enuncia: El ángulo de las tangentes en dos puntos A y B de la elástica de una viga es igual al área del diagrama de momentos flectores entre esos dos puntos, divididos por EI.

Para criterio de signos, tomaremos como áreas positivas las que provienen de diagramas de momentos positivos. Se tomará un área positiva para indicar que la tangente derecha en B forma un ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj con la tangente izquierda en A.

2. Deducir el segundo teorema del área de momentos.

Nos referiremos a la figura del Problema 1. Se quiere calcular la distancia en vertical del punto B de la elástica, a la tangente trazada a esta curva por A, que se ha representado en la figura por Bb. La contribución a esta longitud Bb de la flexión del elemento ds es el valor elemental $x\,d\theta$ representado. Pero en el Problema 1 se vio que $d\theta = M\,dx/EI$, por lo que

$$x\,d\theta = \frac{Mx\,dx}{EI}$$

Con referencia a la figura del Problema 1, el segundo miembro de esta ecuación representa el momento del área rayada $M\,dx$ respecto a una vertical por B, dividido por EI. La integración produce

$$Bb = \int_A^B \frac{Mx\,dx}{EI}$$

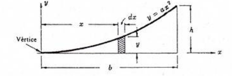
Esta ecuación dice que si A y B son puntos de la elástica de una viga, la distancia en vertical desde B a la tangente a la curva en A es igual al momento con respecto a la vertical por B del área del diagrama de momentos flectores entre A y B, divididos por EI. Es el llamado segundo teorema del área de momentos.

Como criterio de signos, tomaremos como positivos los momentos de las áreas de diagramas de momentos positivos, y estos momentos de áreas positivos darán origen a desplazamientos positivos. Además, definiremos como desplazamientos positivos aquellos en que el punto B esté encima de la tangente trazada por A.

Es importante observar que este teorema indica desplazamientos relativos, esto es, el del punto B con respecto a la tangente trazada a la curva en A. El verdadero desplazamiento absoluto, o flecha, del punto B puede ser nulo, como en el punto situado sobre un apoyo de la viga, aunque en ese caso puede haber un desplazamiento relativo no nulo respecto a la tangente en A.

3. Determinar las áreas y situar los centros de gravedad de las figuras que se presentan comúnmente en los diagramas de momentos flectores trazados por partes.

En general, tendremos que tratar solo de tres figuras geométricas: el rectángulo, el triángulo y la parábola. Para el rectángulo es indudable que el área es igual al producto de las longitudes de dos lados adyacentes, y el centro de gravedad coincide con el geométrico. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura, y el centro de gravedad se estudió en el Problema 1 del Capítulo 7.



Consideremos, ahora, el caso de la parábola representada en la figura adjunta. Obsérvese que la parábola está colocada de modo que su vértice coincida con el origen de coordenadas.

Para determinar su área, consideremos primero la del elemento rayado de altura y y anchura dx. Evidentemente, el área es $y\,dx$. Para

hallar la total, bajo la parábola del dibujo, debemos sumar las de todos esos elementos mediante una integración:

$$A = \int y\,dx = \int_0^b ax^2\,dx = \frac{1}{3}a\,[x^3]_0^b = \frac{1}{3}a\,b^3$$

Pero cuando $x = b$, $y = h$, por lo que $a = \frac{h}{b^2}$ y $A = \frac{1}{3}bh$.

Para determinar la coordenada x del centro de gravedad de esta área parabólica, emplearemos la definición dada en el Capítulo 7, esto es,

$$\bar{x} = \frac{\int x\,da}{A}$$

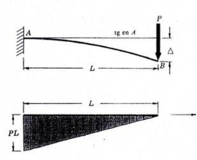
de donde $\bar{x} = \frac{\int x(y\,dx)}{bh/3} = \frac{\int_0^b x(ax^2)dx}{bh/3} = \frac{a\,[x^4/4]_0^b}{bh/3} = \frac{(h/b^2)(b^4/4)}{bh/3} = \frac{3}{4}b.$

El rectángulo, el triángulo y la parábola serán las únicas figuras geométricas que encontremos al tratar de las áreas de momentos de vigas sometidas a pares, cargas aisladas y cargas uniformemente repartidas.

Así, pues, en muchos casos se pueden hallar los momentos de las áreas bajo los diagramas de momentos flectores que se emplean en el segundo teorema del área de momentos, con el empleo de las expresiones anteriores de áreas y centros de gravedad. El momento estático del área es igual al producto de su valor por la distancia del centro de gravedad al eje de momentos.

4. La viga en voladizo de la figura está sometida a la carga aislada P aplicada en su extremo libre. Determinar la flecha en el punto de aplicación de la carga.

En el caso de una viga en voladizo, no es necesario determinar la reacción del muro, aunque su determinación sea extremadamente sencilla. Se sabe que la pendiente y la flecha son nulas en el extremo empotrado A, por definición de viga en voladizo, por lo que la línea gruesa constituye una representación apropiada de la elástica.



El diagrama de momentos flectores se dibuja más fácilmente recorriendo la viga de derecha a izquierda, obteniéndose el gráfico de la derecha. En el Problema 1 del Capítulo 6 se estudió la construcción de este diagrama.

Ahora, trazamos una tangente a la elástica en el punto A. En el caso de una viga en voladizo, esta tangente coincide con la posición de la barra original, sin flexar, y se representa por la recta de la figura. Por tanto, en este caso particular, el desplazamiento del punto B desde la tangente en A es la flecha real buscada. Este desplazamiento puede hallarse utilizando el segundo teorema del área de momentos. Por el desplazamiento del punto B desde la tangente trazada por A, está dado por el momento respecto a la vertical por B del área bajo el diagrama de momentos flectores entre A y B, divididos por el producto EI. En la práctica, como la sección de la viga es constante en toda su longitud, es más fácil trabajar directamente con el diagrama de momentos ordinario que con el de M/EI. En este caso, el desplazamiento resultante debe multiplicarse por el producto EI.

Por tanto, según el segundo teorema del área de momentos, el producto por EI del desplazamiento de B desde la tangente en A, representado por Δ, está dado por el momento de la parte rayada del diagrama de momentos flectores respecto a la vertical por B. Este momento se calcula multiplicando el área por la distancia del centro

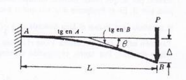
de gravedad a la vertical por B. El área del diagrama triangular de momentos es $\frac{1}{2}(L)(-PL)$, donde el signo menos es debido a que el momento flector es negativo. El centro de gravedad está a la distancia $2L/3$ del extremo derecho. Por tanto, el teorema del área de momentos se convierte en

$$EI\Delta = \frac{1}{2}(L)(-PL)(\frac{2}{3}L) = -\frac{PL^3}{3} \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{PL^3}{3EI}$$

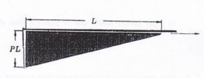
El signo menos implica que la posición final de B está por debajo de la tangente trazada por A.

5. Determinar la pendiente en el extremo derecho de la viga en voladizo estudiada en el Problema 4.

La línea curva gruesa representativa de la viga flexada es la trazada en el Problema 4. También se vio allí el diagrama de momentos. Aquí se han reproducido ambos.



En el primero de estos diagramas se han trazado tangentes a la elástica de la viga, en el extremo empotrado A y en el libre B, designadas en la figura por tangente en A y en B, respectivamente. De acuerdo con el primer teorema del área de momentos, el ángulo θ de esas dos tangentes es igual al área bajo el diagrama de momentos flectores entre A y B, divididos por EI. Así, según este teorema, el producto de EI por el ángulo θ está dado por el área rayada bajo el diagrama, y tenemos



$$EI\theta = \tfrac{1}{2}(L)(-PL)$$

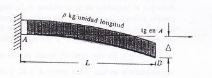
donde el signo negativo que acompaña a PL es debido a que el momento flector es negativo. Despejando,

$$\theta = -\frac{PL^2}{2EI}$$

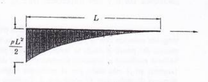
El signo menos significa que la tangente derecha, en B, forma un ángulo del sentido de las agujas del reloj con la tangente izquierda, en A, lo que está de acuerdo con el criterio de signos estudiado en el Problema 1. El ángulo θ está, indudablemente, en radianes.

6. Una viga en voladizo está sometida a una carga uniformemente repartida sobre toda su longitud, como se ve en la figura. Determinar la flecha del extremo libre.

Como en el Problema 4, no es necesario hallar las reacciones en el extremo de la viga. Primero debemos trazar un esquema aproximado de la viga deformada. Como está empotrada en el extremo izquierdo, es evidente que la pendiente y la flecha son nulas en dicho extremo, por lo que la curva gruesa representa una elástica que está de acuerdo con las condiciones conocidas de pendiente y flecha en el extremo citado.



Para trazar el diagrama de momentos flectores es mejor recorrer la viga de derecha a izquierda. En el Problema 2 del Capítulo 6 se estudió el modo de trazarlo. Como se vio allí, el momento máximo se produce en el muro de sujeción y tiene el valor $pL^2/2$, donde p representa la intensidad de la carga uniforme por unidad de longitud de viga. También se vio en ese problema que el diagrama de momentos es una parábola.



Ahora, trazamos una tangente a la deformada en el punto A. Al extremo libre le designamos por B. Como en el Problema 4, esta tangente coincide con la posición original de la viga y se representa por la recta de la figura. Por tanto, el desplazamiento de B respecto a la tangente en A, representa la flecha buscada, que puede hallarse mediante el segundo teorema del área de momentos. Según él, el desplazamiento del punto B respecto a la tangente por A está dado por el momento respecto a una vertical por B del área del diagrama de momentos flectores divididos por EI entre A y B. Es preferible trabajar con el diagrama ordinario de momentos de más arriba y multiplicar la flecha resultante por EI.

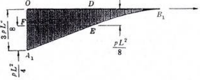
Por tanto, por el segundo teorema del área de momentos, el producto por EI del desplazamiento de B desde la tangente en A, representado por Δ, está dado por el momento del diagrama de momentos rayado, respecto a una vertical por B, que puede hallarse multiplicando el área por la distancia de su centro de gravedad a la vertical que pasa por B. En el Problema 3 se vio que el área del diagrama parabólico es 1/3 de la del rectángulo que encierra la parabola, por lo que el área buscada será $\frac{1}{3}(L)(-\frac{pL^2}{2})$, con signo menos por ser negativo el momento flector. También se vio en el Problema 3 que el centro de gravedad de la figura parabólica está a la distancia $3L/4$ del extremo derecho. Por tanto, el segundo teorema del área de momentos se transforma en

$$EI\Delta = \frac{1}{3}(L)(-\frac{pL^2}{2})(\frac{3L}{4}) = -\frac{pL^4}{8} \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{pL^4}{8EI}$$

El signo menos indica que la posición final de B está por debajo de la tangente trazada en A.

7. Una viga en voladizo esta sometida a la carga uniformemente repartida desde su centro hasta el extremo, que se representa en la figura. Determinar la flecha del extremo libre.

No es necesario calcular las reacciones en el extremo izquierdo. La curva gruesa representa un trazado aproximado aceptable de la elástica. Esta curva está de acuerdo con las condiciones conocidas de pendiente y flecha nulas en el extremo izquierdo de la viga. Se traza más fácilmente el diagrama de momentos flectores recorriendo la viga de derecha a izquierda. Bajo la carga uniforme, el momento será parabólico, como se vio en el Problema 2 del Capítulo 6. Para trazar la parte de diagrama entre A y C se puede sustituir la parte de carga aplicada entre C y B por su resultante $pL/2$ kg, que actúa hacia abajo. En un punto cualquiera entre A y C, situado a la distancia x del extremo B, el momento flector está dado por el momento de la resultante de la carga repartida respecto a un eje por ese punto, perpendicular al plano del papel. Por tanto, el momento flector en cualquier parte entre A y C está dado por $-\frac{pL}{2}(x - \frac{L}{4})$. Es una función lineal, por lo que la representación es una recta entre A y C, y el diagrama de momentos flectores consta de una zona parabólica DB_1E y otra trapezoidal $ODEA_1$, como se ha representado más arriba.



Ahora, se traza una tangente a la elástica en el punto A. El extremo libre de la viga se representa por B. Esa tangente coincide con la posición original de la viga y corresponde a la recta de la figura. Por tanto, el desplazamiento del punto B desde la tangente trazada por A representa la flecha del extremo libre de la viga, que puede hallarse mediante el segundo teorema del área de momentos. De acuerdo con él, el desplazamiento de B desde la tangente en A está dado por el momento respecto a la vertical por B del área bajo el diagrama de momentos flectores divididos por EI entre A y B. También en este caso es conveniente trabajar con el diagrama de momentos ordinario representado anteriormente, y multiplicar la flecha resultante por EI.

Puede calcularse más fácilmente el momento del área OB_1A_1 respecto a una vertical por B, considerando el área dividida en tres partes: la zona parabólica DB_1E, la rectangular $ODEF$ y la triangular FEA_1. El momento de la zona parabólica está dado por el producto de su área (que es 1/3 de la del rectángulo que le envuelve) por la distancia desde B_1 a su centro de gravedad (que es 3/4 de la longitud $L/2$). Por tanto, el momento es

$$\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

El de la parte rectangular está dado por el producto de su área por la distancia desde B_1 al centro de gravedad, que es $3L/4$. Por tanto, vale

$$\frac{L}{2}\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

El momento de la parte triangular es igual al producto de su área por la distancia desde B_1 al centro de gravedad, que es $\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\right)$. Por tanto, es

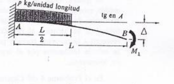
$$\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{-pL^2}{4}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

El momento de toda el área OB_1A_1 respecto a una vertical por B es igual a la suma de los momentos de las tres áreas mencionadas antes, por lo que el segundo teorema del área de momentos nos dice que

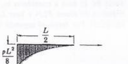
$$EI\Delta = \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)+\frac{L}{2}\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{-pL^2}{4}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{-41pL^4}{384EI}$$

El signo negativo indica que la posición final de B está debajo de la tangente trazada por A.

8. Una viga en voladizo está sometida al momento M_1 y a la carga uniformemente repartida sobre la mitad de su longitud, representados en la figura. Determinar la flecha en el extremo libre.



No es necesario calcular las reacciones en el extremo izquierdo de la viga. La línea curva gruesa representa la forma aproximada de la elástica, que está de acuerdo con las condiciones de pendiente y flecha nulas en el extremo izquierdo. En este caso, como sobre la viga actúan dos cargas, quizá sea más sencillo trazar el diagrama de momentos flectores *por partes*, como se vio en los Problemas 14 y 15 del Capítulo 6. Se trazará un diagrama que represente los momentos debidos a M_1 solo, sin considerar la carga uniforme, y otro para esta última carga solamente, no teniendo en cuenta el momento M_1. En el trazado de cada uno de ellos es preferible recorrer la viga desde el extremo derecho hacia el izquierdo.



El primer diagrama de momentos, debido a M_1 solo, es evidentemente un rectángulo, pues el momento flector producido por M_1 es el mismo en todos los puntos de la viga. El momento M_1 hace flexar la viga hasta adoptar una forma cóncava hacia abajo, que, de acuerdo con el criterio de signos del Capítulo 6, constituye un momento flector negativo.

El segundo diagrama de momentos flectores, debido a la carga uniforme, es parabólico, como se vio en el Problema 6, excepto que aquí la parábola corresponde solo a la parte de la viga que está sometida a la carga uniforme, esto es, la mitad izquierda.

Ahora trazamos una tangente a la elástica en el punto A. El extremo libre de la viga se designa por B. Esta tangente coincide con la posición original de la viga y está representada por la recta. Así, pues, el desplazamiento

del punto B desde la tangente trazada por A representa la flecha buscada del extremo libre de la viga. De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, este desplazamiento de B respecto a la tangente en A está dado por el momento respecto a la vertical por B del área bajo el diagrama total de momentos flectores divididos por EI entre A y B.

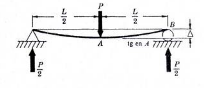
Se halla más fácilmente este momento del área del diagrama total de momentos flectores divididos por EI entre A y B, respecto a la vertical por B, sumando los momentos de las áreas rectangular y parabólica respecto a esa vertical. Para cada una de las partes, el momento buscado es igual al producto del área por la distancia de su centro de gravedad a B. Son las mismas áreas y distancias al centro de gravedad utilizadas en problemas anteriores. Por tanto, el segundo teorema del área de momentos, da

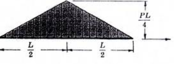
$$EI\Delta = (-M_1)(L)(\frac{L}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{L}{2})(\frac{-pL^2}{8})(\frac{L}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}) \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{M_1L^2}{2EI} - \frac{7pL^4}{384EI}$$

El signo menos indica que la posición final de B está por debajo de la tangente trazada en A.

9. La viga simplemente apoyada está cargada con una fuerza aislada aplicada en su centro, como se ve en la figura. Hallar la flecha máxima.

Las reacciones en los extremos son cada una $P/2$, por simetría. La línea gruesa representa la elástica de la viga; evidentemente, debe ser simétrica respecto al punto medio, pues la carga está centrada. A causa de esta simetría, la tangente a la elástica en su punto medio ha de ser horizontal. El punto medio de la viga se representa por A, y la tangente en A es la recta horizontal indicada. El extremo derecho se designa por punto B. También, por simetría, la flecha máxima se produce en el centro.





Se quiere hallar la flecha de la viga en el punto medio, esto es, en el de aplicación de la fuerza P. La observación de la figura de arriba revela que esta flecha central Δ es idéntica al desplazamiento del punto B respecto a la tangente trazada por A. Este último valor se calcula fácilmente por el segundo teorema del área de momentos.

En el Problema 4 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de momentos flectores de este caso particular, que se ha representado arriba.

Para calcular el desplazamiento de B desde la tangente en A es necesario hallar el momento del área bajo el diagrama de momentos entre estos dos puntos, respecto a una vertical por B, y dividir esta cantidad por el producto EI. El área a considerar es, pues, la mitad derecha del anterior diagrama de momentos rayado, esto es, el triángulo de altura $PL/4$ y base $L/2$. La distancia del centro de gravedad de este triángulo a la vertical por B es $(2/3)(L/2)$. Por tanto, el segundo teorema del área de momentos aplicado entre A y B da la flecha buscada:

$$EI\Delta = \frac{1}{2}(\frac{L}{2})(\frac{PL}{4})(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}) \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

El ser esta cantidad positiva indica que el punto B está encima de la tangente en A.

Debe observarse que el segundo teorema del área de momentos indica siempre desplazamientos relativos, esto es, el desplazamiento de un punto de una viga con respecto a una tangente trazada en un segundo punto de la misma. En este problema particular, el desplazamiento verdadero o absoluto de B es nulo, pero podemos imaginar un desplazamiento de B relativo a la tangente trazada en A. Afortunadamente, este desplazamiento relativo es igual a la flecha total buscada por la simetría.

10. La viga simplemente apoyada está cargada con dos fuerzas colocadas simétricamente, como se ve en la figura. Hallar la flecha máxima.

Por simetría, cada una de las reacciones en los extremos es igual a P. La línea gruesa representa la elástica de la viga, que debe ser simétrica respecto al punto medio, porque las cargas están aplicadas simétricamente. Como en el Problema 9, la tangente a la elástica en el centro de la viga, representado por A, es horizontal. El extremo derecho se designa por B. Por simetría, la flecha máxima debe producirse en el centro de la viga.

Pero el diagrama indica que la flecha en el punto medio es igual al desplazamiento del punto B respecto a la tangente en A, estando ambos valores representados por Δ. Es muy sencillo calcular este desplazamiento utilizando las áreas de momentos.

Probablemente se traza mejor el diagrama de momentos flectores *por partes*, recorriendo la viga de derecha a izquierda. En este procedimiento, estudiado en los Problemas 14 y 15 del Capítulo 6, se dibuja el diagrama de momentos de cada una de las fuerzas P aplicada aisladamente, resultando el diagrama final que puede verse arriba.

Por el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento de B desde la tangente en A es igual al momento respecto a la vertical por B del área de momentos flectores divididos por EI entre A y B. Esta área consta de los dos triángulos *deh* y *efg*. La situación de los centros de gravedad de estos triángulos se estudió en el Problema 3. Según el segundo teorema del área de momentos, tenemos

$$EI\Delta = \frac{1}{2}(\frac{L}{2})(\frac{PL}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{L-2a}{2})[-(\frac{PL}{2} - Pa)][a + \frac{2}{3}(\frac{L-2a}{2})] = \frac{PL^2a}{8} - \frac{Pa^3}{6}$$

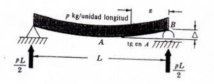
y

$$\Delta = \frac{PL^3}{24EI}(\frac{3a}{L} - \frac{4a^3}{L^3})$$

El signo menos de la primera de las cantidades que aparecen entre corchetes es debido a que representa la altura del triángulo *efg*, que corresponde a un momento flector negativo. En este problema particular se podría haber trazado el diagrama de momentos del modo tradicional en lugar de por partes, como se ha hecho más arriba, sin que esto hubiera supuesto más complicación.

11. La viga simplemente apoyada está sometida a la carga uniformemente repartida representada. Determinar la flecha máxima.

Por simetría, las reacciones en cada extremo valen $pL/2$. La línea gruesa representa la elástica de la viga, que ha de ser simétrica respecto al punto medio, pues las cargas y sustentaciones lo son. El punto medio se representa por A y, por simetría, la tangente a la elástica en A es horizontal. Al extremo derecho le designamos por B. Por simetría, la flecha máxima se producirá en el punto medio.



Se quiere hallar la flecha de la viga en su punto medio. Del diagrama de más arriba resulta evidente que esta flecha central representada por Δ es igual al desplazamiento del punto B desde la tangente trazada por A. Esta última cantidad se puede determinar, indudablemente, por el área de momentos.

Probablemente es preferible dibujar el diagrama de momentos por partes para poder aplicar el teorema del área del modo más sencillo posible. Es mejor recorrer la viga de derecha a izquierda.

Tracemos primero el diagrama de momentos correspondiente a la reacción $pL/2$ en el extremo derecho de la viga. Si se considera que solo actúa esta fuerza producirá un momento flector positivo, pues está dirigida hacia arriba. Si introducimos la coordenada z con origen en el extremo derecho de la viga y tomamos valores de z hacia la izquierda, como en el diagrama de más arriba, el momento debido a la reacción en la sección z está dado por $(pL/2)z$, que se representa por el triángulo de la Fig. (a) adjunta. Es nulo en el extremo derecho de la viga y adopta el valor $pL^2/2$ en el izquierdo.

$\frac{pL^2}{2}$ A B

Fig. (a)

Ahora podemos dibujar el diagrama de momentos flectores de la carga repartida sola. Si solo actúa en la viga esta fuerza producirá momentos negativos porque va dirigida hacia abajo. Para hallar el momento flector en la sección z debido solo a la carga repartida podemos sustituir la parte de carga uniforme a la derecha de la sección por su resultante, que es una fuerza aislada de pz kg aplicada a la distancia $z/2$ a la derecha de z. Por tanto, el momento flector en esa sección, debido a la carga uniforme sola, es $-pz^2/2$, que se representa por la parábola de la Fig. (b), cuyo valor es cero en el extremo derecho de la viga y $pL^2/2$ en el izquierdo.

A B $\frac{pL^2}{2}$

Fig. (b)

El diagrama de momentos total está compuesto de las dos partes, como se ve en la Figura (c).

De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento de B desde la tangente en A es igual al momento respecto a la vertical por B del área del diagrama de momentos flectores divididos por EI entre A y B. Del diagrama de arriba podemos calcular el momento del área triangular ABC respecto a la vertical por B por el producto del área del triángulo y la distancia desde su centro de gravedad a B, que es $(2/3)(L/2)$. Por consiguiente, vale

$\frac{pL^2}{2}$ $\frac{pL^2}{2}$ C B D $\frac{pL^2}{4}$ $\frac{pL^2}{8}$

Fig. (c)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{pL^2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

Además, el momento del área parabólica ABD respecto a la vertical por B está dado por el producto del área ABD (que es 1/3 de la del rectángulo que la envuelve) por la distancia desde B a su centro de gravedad, que es $(3/4)(L/2)$. Por tanto, vale

$$\frac{1}{3}\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

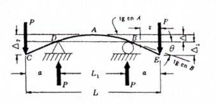
Hay que observar que en el término $pL^2/8$ figura un signo menos, pues representa la altura de la parábola en el punto A y esa área parabólica corresponde a un momento flector negativo. Así, pues, del segundo teorema del área de momentos, tenemos

$$EI\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{pL^2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{-pL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

y

$$\Delta = \frac{5pL^4}{384EI}$$

12. La viga con extremos volados de la figura está cargada con dos fuerzas aisladas. Hallar la flecha en el punto medio.



Cada una de las reacciones es igual a P kg, por simetría. La elástica de la viga, representada por la línea gruesa, es simétrica respecto a su punto medio, por lo que la tangente en dicho punto es horizontal. Representaremos por A el punto medio de la viga y por B el situado sobre el apoyo derecho. Del diagrama, resulta evidente que la flecha en el centro está dada por Δ, que puede considerarse también como el desplazamiento de B desde la tangente trazada por A. Nuevamente se hace notar que el método del área de momentos indica desplazamientos relativos, en este caso el de B con relación a la tangente en A. Indudablemente, el desplazamiento de B es nulo, pero el teorema del área de momentos nos permite hallar la flecha en el centro buscada por el método indirecto de determinar el desplazamiento relativo de B respecto a la tangente en A.

También ahora se dibuja mejor el diagrama de momentos por partes. Adoptemos un sistema de coordenadas z con origen en el extremo derecho de la viga y dirigido hacia la izquierda, como se ve en la figura de arriba. A causa de la fuerza P dirigida hacia abajo, aplicada en el extremo derecho, el momento flector en una sección cualquiera a la distancia z de dicho extremo está dado por $-Pz$, con signo menos, pues las cargas dirigidas hacia abajo corresponden a momentos negativos. El diagrama correspondiente a esta carga sola está representado en la Fig. (a) adjunta.

Recorriendo la viga de derecha a izquierda, el momento flector debido a la reacción P aplicada en el punto B no existe hasta que pasamos a la izquierda de B. Por tanto, en una sección cualquiera a la distancia z del extremo derecho de la viga, el momento flector debido a esta fuerza P sola está dado por $P(z - a)$, que es positivo porque las fuerzas dirigidas hacia arriba dan origen a momentos positivos. El diagrama de momentos para esta carga sola tiene la representación dada en la Figura (b).

Finalmente, el diagrama de momentos debidos a la reacción P aplicada en D comienza después de pasar a la izquierda de D. En cualquier punto a la distancia z del extremo derecho de la viga el momento flector debido a esta fuerza P sola está dado por $P[z - (L_1 + a)]$, y su diagrama tiene la forma de la Figura (c).

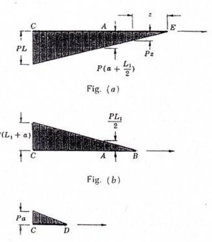


Fig. (a)

Fig. (b)

Fig. (c)

Por consiguiente, el diagrama de momentos total está compuesto por los tres triángulos anteriores, como se ve en la Figura (d).

El desplazamiento del punto B desde la tangente trazada a la elástica por A está dado por el momento del área bajo el diagrama de momentos entre A y B respecto a una vertical por B dividido por EI. El área citada consta de un triángulo AFB y un trapecio $ABHG$. El trapecio se puede considerar, para más facilidad, dividido en un rectángulo de altura Pa y un triángulo de altura $PL_1/2$. En el Problema 3 se vio el área de cada una de esas figuras y la situación de su centro de gravedad. Por tanto, de acuerdo con el teorema del área de momentos, la flecha buscada está dada por:

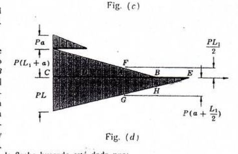


Fig. (d)

$$EI\Delta = \frac{1}{2}(\frac{L_1}{2})(\frac{PL_1}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{L_1}{2}) + (\frac{L_1}{2})(-PA)(\frac{L_1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{L_1}{2})(\frac{-PL_1}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{L_1}{2}) \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{PaL_1^2}{8EI}$$

13. Determinar la pendiente de la viga del Problema 12 en el punto sobre el soporte *B*.

Para la determinación de pendientes resulta útil el primer teorema del área de momentos. Consideremos nuevamente los puntos *A* y *B* del Problema 12. Como vimos, la tangente a la elástica en *A* es horizontal por simetría de cargas y sustentación. Si se puede calcular la variación de la pendiente de la elástica entre *A* y *B*, esta variación será igual, evidentemente, a la propia pendiente en *B*, pues en *A* es nula. El primer teorema del área de momentos nos dice que el ángulo entre las tangentes en *A* y *B* es igual al área del diagrama de momentos flectores divididos por *EI* entre esos dos puntos. Indudablemente, el ángulo que forma la tangente en *A* con la horizontal es nulo, y hemos expresado que forma con dicha horizontal la tangente en *B* por θ. No tenemos, pues, más que hallar el área bajo el diagrama de momentos entre *A* y *B*, según el primer teorema. Como antes, esta área consta del triángulo *AFB* y el trapecio *ABHG*, por lo que tendremos

$$EI\theta = \frac{1}{2}(\frac{L_1}{2})(\frac{PL_1}{2}) + (\frac{L_1}{2})(-Pa) + \frac{1}{2}(\frac{L_1}{2})(\frac{-PL_1}{2})$$

y

$$\theta = -\frac{PaL_1}{2EI}$$

El signo menos indica que la tangente en *B* forma un ángulo en el sentido de las agujas del reloj con la trazada por *A*, lo que coincide con el criterio de signos adoptado en el Problema 1.

14. Consideremos nuevamente la viga con extremos volados del Problema 12. Determinar la flecha del extremo *E* respecto a su posición original.

La flecha buscada se designa en la figura del Problema 12 por Δ_1. De esta figura se deduce inmediatamente que

$$\Delta_1 = \Delta_2 - \Delta$$

Puede considerarse que Δ_2 es el desplazamiento del punto *E* desde la tangente a la elástica por *A*, y como tal, calcularla por el segundo teorema del área de momentos. En el Problema 12 se ha hallado ya Δ.

Para calcular Δ_2 utilizaremos el segundo teorema del área de momentos, que dice que el desplazamiento de *E* desde la tangente a la elástica en *A* es igual al momento del área bajo el diagrama de momentos entre *A* y *E* divididos por *EI* respecto a una vertical por *E*. Esta área consta de los triángulos *AFB* y *AGE* del diagrama de momentos dibujado por partes en el Problema 12. Por tanto, según el teorema, el desplazamiento Δ_2 está dado por

$$EI\Delta_2 = \frac{1}{2}(\frac{L_1}{2})(\frac{PL_1}{2})[a + \frac{2}{3}\cdot\frac{L_1}{2}] + \frac{1}{2}(a + \frac{L_1}{2})[-P(a + \frac{L_1}{2})][\frac{2}{3}(a + \frac{L_1}{2})] = -\frac{PaL_1^2}{8} - \frac{Pa^2L_1}{2} - \frac{Pa^3}{3}$$

En el Problema 12 se halló que $\Delta = -\dfrac{PaL_1^2}{8EI}$.

Finalmente, la flecha Δ_1 buscada se puede hallar por la relación geométrica

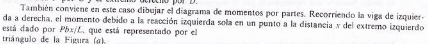
$$\Delta_1 = \Delta_2 - \Delta$$

que es

$$\Delta_1 = -\frac{PaL_1^2}{8EI} - \frac{Pa^2L_1}{2EI} - \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{PaL_1^2}{8EI} = -\frac{Pa^2L_1}{2EI} - \frac{Pa^3}{3EI}$$

15. La viga simplemente apoyada está sometida a la carga de la figura. Determinar la flecha en su punto medio.

Por la estática, las reacciones en los extremos tienen los valores indicados. La línea gruesa representa la forma aproximada de la elástica. Evidentemente, esta curva no es simétrica respecto a su centro, lo que hace el problema algo más difícil que los anteriores. Designamos el extremo izquierdo de la viga por A, el centro por B, el punto de aplicación de la fuerza P por C y el extremo derecho por D.



También conviene en este caso dibujar el diagrama de momentos por partes. Recorriendo la viga de izquierda a derecha, el momento debido a la reacción izquierda sola en un punto a la distancia x del extremo izquierdo está dado por Pbx/L, que está representado por el triángulo de la Figura (*a*).

Fig. (*a*)

Continuando hacia la derecha a lo largo de la viga, el efecto de la carga P dirigida hacia abajo no aparece de manifiesto en el diagrama de momentos hasta que pasamos a la derecha de su punto de aplicación. En un punto cualquiera a la distancia x de A, situado a la derecha de la carga P, el momento flector debido solo a P está dado por $-P(x-a)$, que puede representarse por el triángulo de la Figura (*b*).

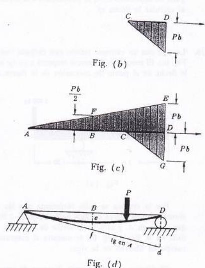


Fig. (*b*)

El diagrama de momentos total, dibujado por partes, es el que aparece en la Figura (*c*).

Fig. (*c*)

La flecha en el centro de la viga se puede hallar empleando el teorema del área de momentos de la forma indirecta siguiente. Se traza una tangente a la elástica en el extremo izquierdo, que designamos por tangente en A en la Fig. (*d*). Ahora podemos calcular el desplazamiento del punto D desde la tangente en A mediante el segundo teorema del área de momentos. En la Fig. (*d*) se designa este desplazamiento por Dd. Debe recordarse nuevamente que el método del área de momentos indica desplazamientos relativos, en este caso el del punto B con relación a la tangente trazada por A. El desplazamiento absoluto del punto D es, evidentemente, nulo, pues la viga está apoyada en ese punto.

Fig. (*d*)

De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento de D desde la tangente por A está dado por el momento del área bajo el diagrama de momentos entre A y D respecto a una vertical por D dividido por EI. Así, pues, tomando el momento de los triángulos ADE y CDG respecto a la vertical por D, tenemos

$$EI(Dd) = \frac{1}{2}(L)(Pb)\left(\frac{L}{3}\right) + \frac{1}{2}(b)(-Pb)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{PbL^2}{6} - \frac{Pb^3}{6}$$

Como se dijo antes, B representa el punto medio de la viga. Evidentemente, por la semejanza de triángulos, el segmento Bf de la Fig. (*d*) es la mitad de Dd y podemos escribir

$$EI(Bf) = \frac{PbL^2}{12} - \frac{Pb^3}{12}$$

Ahora es posible ya calcular el desplazamiento del punto medio de la viga desde la tangente trazada por A, representado por el segmento ef en la figura anterior. De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, está dado por el momento del área bajo el diagrama de momentos entre A y B respecto a una vertical por B dividido por EI. Esta parte del diagrama de momentos está representada por el triángulo ABF. Aplicando el teorema, tenemos

$$EI(ef) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{Pb}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\right) = \frac{PbL^2}{48}$$

De la representación de la elástica de la viga que vimos más arriba, resulta evidente que la flecha en el punto medio buscada está representada por el segmento Be, que puede determinarse por la relación

$$Be = Bf - ef$$

Sustituyendo los valores anteriores en el segundo miembro de la ecuación, hallamos para la flecha buscada el valor

$$EI(Be) = \frac{PbL^2}{12} - \frac{Pb^3}{12} - \frac{PbL^2}{48} \quad \text{y} \quad Be = \frac{PbL^2}{48EI}\left(3 - \frac{4b^2}{L^2}\right)$$

Obsérvese que no es la flecha máxima de la viga, excepto en el caso particular en que $a = b = L/2$. Además, se supone que la carga P está a la derecha del punto medio de la viga, pues en caso contrario el diagrama triangular de momentos CDG se prolongaría a la izquierda del punto medio y sería necesario tener en cuenta un trozo al calcular la flecha ef.

16. La viga con un extremo volado está cargada con la fuerza aislada de 5.000 kg, aplicada como se indica en la Fig. (*a*). El momento de inercia respecto a su eje neutro es de 40.000 cm^4, y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm^2. Determinar la flecha en el punto de aplicación de la fuerza de 5.000 kg.

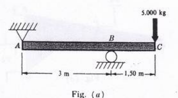


Fig. (*a*)

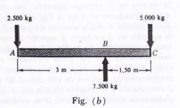


Fig. (*b*)

Por la estática se halla fácilmente que las reacciones son una fuerza dirigida hacia abajo de 2.500 kg que actúa en A, y otra hacia arriba de 7.500 kg, aplicada en B. En la Fig. (*b*) se muestra el diagrama de cuerpo en libertad de la viga.

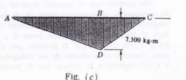


Fig. (*c*)

El diagrama de momentos flectores de este problema puede trazarse de diversas maneras, todas ellas igual de sencillas. Lo dibujaremos del modo tradicional, en cuyo caso aparece como en la Figura (*c*).

En la Fig. (*d*) se ha representado en línea gruesa una forma aproximada de la elástica. En el punto A se ha trazado la tangente que puede verse.

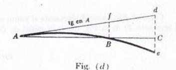


Fig. (*d*)

De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento del punto C, cuya posición final está indicada por e, desde la tangente en A, está

dado por el momento del área bajo el diagrama de momentos entre A y C respecto a una vertical por C dividido por EI. Por tanto, hay que calcular el momento del área de todo el triángulo ADC respecto a una vertical por C, lo que da para el desplazamiento de C respecto a la tangente en A

$$EI(de) = \frac{1}{2}(3)(-7.500)(1{,}50 + \frac{1}{3}\cdot 3) + \frac{1}{2}(1{,}50)(-7.500)(\frac{2}{3}\cdot 1{,}50) = -33.750$$

Hay que tener en cuenta que las unidades del segundo miembro de esta ecuación son kg-m^3.

Ahora tenemos que calcular el desplazamiento del punto B desde la tangente trazada por A, representado por el segmento fB en el gráfico anterior. Hay que recordar nuevamente que el teorema del área de momentos indica desplazamientos relativos, en este caso el de B con relación a la tangente en A. Indudablemente, en la realidad el verdadero desplazamiento absoluto de B es nulo. Ese desplazamiento relativo se puede hallar tomando el momento del área del triángulo ABD respecto a una vertical por B y dividiendo el resultado por EI, lo que da

$$EI(fB) = \frac{1}{2}(3)(-7.500)(\frac{1}{3}\cdot 3) = -11.250$$

También ahora las unidades del segundo miembro de esta ecuación son kg-m^3.

Considerando los triángulos semejantes AfB y AdC de la Fig. (d) podemos escribir $fB/3 = dC/4{,}5$, por lo que, del valor anterior de $EI(fB)$, tenemos

$$EI(dC) = \frac{4{,}5}{3}(-11.250) = -16.875 \text{ kg-m}^3$$

Evidentemente, la flecha en el punto C que buscamos, representada por el segmento Ce, está dada por

$$Ce = de - dC$$

Sustituyendo los valores anteriores en el segundo miembro de esta ecuación, hallaremos para la flecha en C buscada:

$$EI(Ce) = -33.750 - (-16.875) = -16.875$$

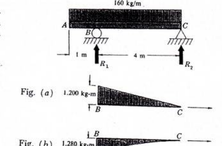
El signo menos indica que la posición final del punto C, designada por e, está por debajo de la tangente trazada por A. Sustituyamos, ahora, $I = 40.000$ cm^4 y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2 en la ecuación anterior. Tenemos para el valor buscado de la flecha

$$Ce = \frac{-16.875(100)^3}{2{,}1 \times 10^6(40.000)} = -0{,}201 \text{ cm}$$

Es importante observar que es necesario introducir el factor 100^3 para tener unidades compatibles, pues la cantidad -16.875 está en kg-m^3, mientras que E e I están expresadas en kg/cm^2, y cm^4, respectivamente.

17. La viga con un extremo volado de la figura está sometida a una carga uniformemente repartida. La barra es de sección rectangular de 9 × 12 cm. Hallar la flecha del punto A. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2.

Por la estática, se halla fácilmente que las reacciones son $R_1 = 500$ kg y $R_2 = 300$ kg. El diagrama de momentos flectores se adapta mejor al método del área de momentos si se dibuja por partes, siguiendo desde los dos extremos hacia el apoyo en el punto B. Primero consideraremos desde C hacia la izquierda, tomando primero el momento debido a la reacción R_2 sola, que aparece en la Fig. (a), y luego el debido a la carga uniforme de 160 kg/m sola, que corresponde a la parábola de la Figura (b).



Ahora iremos desde el punto A hacia la derecha, obteniendo el diagrama parabólico de momentos flectores debidos a la carga uniforme en la región AB representado en la Figura (c).

En la Fig. (d) aparece el diagrama completo dibujado así por partes.

En la Fig. (e) se representa en línea gruesa la forma aproximada de la elástica, a la que se ha trazado una tangente en el punto B.

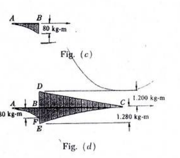


Fig. (c)

Fig. (d)

Se busca la flecha representada por Af. Comenzaremos hallando el desplazamiento de A (cuya posición final está representada por f) desde la tangente trazada por B, que se obtiene fácilmente por el segundo teorema del área de momentos, hallando el momento del área bajo el diagrama entre A y B respecto a la vertical por A y dividiendo por EI. El área mencionada está representada por la parábola ABF. Aplicando el teorema, hallamos

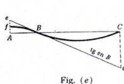


Fig. (e)

$$EI(ef) = \frac{1}{3}(1)(-80)(\frac{3}{4}\cdot 1) = -20 \text{ kg-m}^3$$

El signo menos indica que la posición final del punto A (representada por f) está por debajo de la tangente trazada por B.

Ahora calcularemos el desplazamiento de C desde la tangente trazada por B, representado por Cd y que se obtiene con facilidad mediante el segundo teorema, hallando el momento respecto a la vertical por C del área bajo el diagrama de momentos flectores entre B y C, y dividiendo por EI. Tendremos

$$EI(Cd) = \frac{1}{2}(4)(1.200)(\frac{2}{3}\cdot 4) + \frac{1}{3}(4)(-1.280)(\frac{3}{4}\cdot 4) = 1.280 \text{ kg-m}^3$$

Hay que recordar nuevamente que se trata de un desplazamiento relativo, pues el absoluto del punto C es nulo.

Considerando los triángulos semejantes BCd y ABe, tenemos $eA/1 = Cd/4$, por lo que, del valor de $EI(Cd)$ anterior, obtenemos

$$EI(eA) = \frac{1}{4}(1.280) = 320 \text{ kg-m}^3$$

De la Fig. (e) resulta evidente que la flecha buscada (Af) está dada por

$$Af = eA - ef$$

Sustituyendo en el segundo miembro de esta ecuación los valores hallados antes, tenemos

$$EI(Af) = 320 - 20 = 300 \text{ kg-m}^3$$

Haciendo, ahora, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² e $I = 9(12)^3/12 = 1.296$ cm⁴ en esta ecuación, se halla

$$Af = \frac{300(100)^3}{(2.1 \times 10^6)(1{,}296)} = 0{,}11 \text{ cm}$$

También ahora hay que multiplicar por 100^3, pues el segundo miembro de la ecuación estaba en kg-m³, mientras que los valores de E e I estaban dados en kg/cm² y cm⁴, respectivamente. Este valor de la flecha coincide con el hallado en el Problema 25 del Capítulo 9 por el método de la doble integración.

PROBLEMAS PROPUESTOS

18. Una viga en voladizo de longitud L está sometida a una carga aislada P, aplicada a la distancia a del extremo empotrado. Determinar la flecha en el extremo libre. *Sol.* $Pa^2(3L - a)/6EI$

19. La viga del Problema 18 tiene 3 m de longitud y hay una carga de 500 kg aplicada a 1,80 m del empotramiento. La sección es de 4 × 15 cm, y el material acero para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Hallar la flecha máxima. *Sol.* 0,82 cm

20. Una viga en voladizo de longitud L está sometida a un par M_1 en su extremo libre. Determinar la flecha en dicho extremo. *Sol.* $M_1L^2/2EI$

21. La viga en voladizo del Problema 20 es un perfil H 180, de 6 m de longitud. (*a*) Determinar el máximo valor de M_1 para que la flecha en el extremo libre de la barra no exceda de 0,65 cm. (*b*) Para esta carga, hallar la tensión máxima por flexión en la barra. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* (*a*) 29.000 kg-cm, (*b*) 68 kg/cm²

22. Considerar la viga en voladizo cargada como en el Problema 6. Determinar la pendiente de la viga en el extremo B. *Sol.* $\theta_B = -pL^3/6EI$

23. Una viga en voladizo de longitud L está sometida a un par M_1 aplicado en el punto medio. Determinar la flecha del extremo libre de la barra. *Sol.* $3M_1L^2/8EI$

24. Si la viga del Problema 23 es un perfil H 220, determinar el momento máximo que se puede aplicar para no exceder de una tensión de trabajo a flexión de 1.200 kg/cm². La longitud de la viga es de 3 m. Determinar también la flecha del extremo libre debida a la aplicación de ese momento. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 878.000 kg-cm, 1,75 cm

25. Una viga en voladizo de longitud L soporta una carga uniforme de p kg/m que se extiende desde el extremo empotrado hasta el punto medio de la barra. Determinar la flecha máxima. *Sol.* $7pL^4/384EI$

26. La viga en voladizo del Problema 25 tiene 4 m de longitud y soporta una carga uniforme de 1.500 kg/m desde el extremo empotrado hasta su punto medio. La barra es de acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², y su momento de inercia vale 4.000 cm⁴. Determinar la flecha máxima. *Sol.* 0,83 cm

27. Una viga en voladizo tiene 3 m de longitud y el momento de inercia de su sección es de 40.000 cm⁴. En el extremo libre se aplica una carga de 5.000 kg, y en el punto a 1,80 m del empotramiento, otra de 5.000 kg también. Determinar la flecha máxima de la viga. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 0,767 cm

28. Una viga de acero de sección rectangular de 9 cm por 15 cm tiene una longitud de 3 m y está simplemente apoyada en sus extremos y sometida a una carga uniformemente repartida de 200 kg/m en toda su longitud, así como una fuerza aislada de 1.000 kg aplicada en el punto medio. Determinar la flecha máxima. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 0,145 cm

29. Una viga simplemente apoyada está sometida a las cargas uniformemente repartidas representadas en la Fig. (*a*). Determinar la flecha máxima.
Sol. $-\dfrac{pa^4}{24EI} + \dfrac{pa^2L^2}{16EI}$

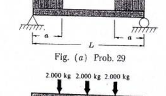


Fig. (*a*) Prob. 29

30. Considerar la viga de nogal simplemente apoyada sometida a las tres cargas aisladas de la Fig. (*b*). La viga tiene 15 cm por 30 cm de sección y el módulo de elasticidad es $0{,}155 \times 10^6$ kg/cm². Determinar la flecha máxima y la tensión por flexión máxima. *Sol.* 4,1 cm, 267 kg/cm²

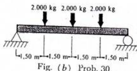


Fig. (*b*) Prob. 30

31. Una viga simplemente apoyada, con extremos en voladizo, está sometida a las cargas uniformemente repartidas de la Fig. (*c*). Determinar la flecha en el punto medio de la viga con respecto a un origen al nivel de los apoyos.

Sol. $\dfrac{pa^2(L - 2a)^2}{16EI}$ (sobre el nivel de los apoyos)

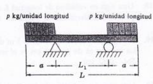


Fig. (*c*) Prob. 31

32. Determinar, para la viga del Problema 31, la flecha en un extremo respecto a un origen a nivel de los apoyos.

Sol. $\dfrac{pa^3L}{4EI} - \dfrac{3pa^4}{8EI}$ (bajo el nivel de los apoyos)

33. Considerar la viga simplemente apoyada del Problema 49 del Capítulo 9. Determinar, por el método del área de momentos, la flecha de la viga en el punto de aplicación del momento M_1. Comparar este resultado con el obtenido utilizando el método de la doble integración.

Sol. $\dfrac{M_1a^2}{2EI} + \dfrac{M_1a(L - a)}{3EI}$

34. La viga del Problema 33 es de sección circular, la longitud es de 4 m y $a = 1$ m. Determinar, para un momento aplicado de 60.000 kg-cm, el diámetro de la viga necesario para que la flecha en el punto de aplicación del momento sea de 0,75 cm. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Hallar también la tensión por flexión máxima en la viga. *Sol.* 10,3 cm, 540 kg/cm²

35. La viga con un extremo volado está sometida a la cara uniformemente repartida y a la fuerza aislada representadas en la Fig. (*d*). Determinar la flecha en el punto *A*.

Sol. $-\dfrac{pa^3b}{3EI} + \dfrac{Pab^2}{4EI} - \dfrac{pa^4}{8EI}$ (bajo el nivel de los apoyos)

36. En la viga del Problema 35, $a = b = 2$ m, $P = 2.000$ kg y $p = 1.200$ kg/m. Se trata de un perfil H 180. Determinar la flecha del punto *A*. Tomar $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* −0,597 cm

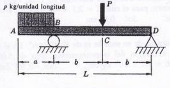


Fig. (*d*) Prob. 35

3.000 m
750 kg-m
B
C
A
D
1,80 m
0,60 m
0,90 m

Fig. (*e*) Prob. 37

37. Considerar la viga simplemente apoyada con un extremo volado de la Fig. (*e*). La carga consta de un momento de 750 kg-m y una fuerza de 3.000 kg, aplicados como se indica. El momento de inercia de la sección de la viga es de 1.590 cm⁴ y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Determinar la flecha del punto *B* en que está aplicado el momento.

Sol. 0,259 cm

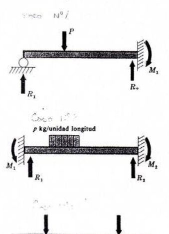
CAPITULO 11

Vigas estáticamente indeterminadas

VIGAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS. En los Capítulos 9 y 10 se han estudiado las deformaciones y las tensiones para vigas con distintas condiciones de cargas y sustentaciones. En todos los casos tratados era posible determinar completamente las reacciones ejercidas sobre la viga, aplicando simplemente las ecuaciones del equilibrio estático. En esos casos, se dice que las vigas son estáticamente determinadas.

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS. En este capítulo consideraremos las vigas en las que el número de reacciones desconocidas es mayor que el de ecuaciones de equilibrio disponibles para el sistema. En esos casos, es necesario suplementar dichas ecuaciones con otras que provengan de las deformaciones de la viga. Se dice, entonces, que la viga es estáticamente indeterminada.

TIPOS DE VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS. Más abajo se representan varios casos corrientes de vigas estáticamente indeterminadas. Aunque en la práctica existe una gran variedad de tipos de tales estructuras, los tres esquemas siguientes sirven de ejemplo de sistema indeterminado. Para las vigas representadas abajo, las reacciones de cada una de ellas constituyen un sistema de fuerzas paralelas, por lo que se dispone de dos ecuaciones de la estática. La determinación de las reacciones exige, pues, en cada uno de los casos, otra u otras ecuaciones que provengan de la deformación de la viga.



En este caso de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, llamada a veces voladizo apoyado, tenemos como reacciones desconocidas R_1, R_2 y M_1. Hay que suplementar las dos ecuaciones de la estática con otra basada en las deformaciones. Para aplicaciones, véanse los Problemas 1 y 4.

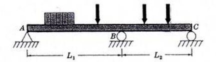
En este caso de viga empotrada en los dos extremos, las reacciones desconocidas son R_1, R_2, M_1 y M_2 y hay que suplementar las dos ecuaciones de la estática con dos que provengan de las deformaciones. Para aplicaciones, véanse los Problemas 9, 12 y 15.

En este caso, la viga está sustentada en tres apoyos al mismo nivel. Las reacciones desconocidas son R_1, R_2 y R_3 y es necesario añadir una ecuación basada en las deformaciones, a las dos de la estática. Una viga de este tipo, que descansa en más de dos apoyos, se llama *viga continua*. Para aplicaciones, véanse los Problemas 19, 22, 23 y 24.

NATURALEZA DE LAS ECUACIONES QUE PROVIENEN DE LAS DEFORMACIONES DE LA VIGA. En el primero de los ejemplos anteriores se deducen las ecuaciones basadas en las deformaciones, haciendo uso del hecho de ser nulo el desplazamiento del extremo izquierdo de la viga, que está apoyado. Utilizando el segundo teorema del área de momentos, se expresa este desplazamiento en función de R_1 y se iguala a cero, despejando R_1 de la ecuación así obtenida. Luego, de las dos ecuaciones de la estática se obtienen los valores de R_2 y M_1.

En el segundo de los ejemplos anteriores, las ecuaciones de las deformaciones se basan en dos hechos: (*a*) la variación de la pendiente de las tangentes trazadas en los dos extremos de la viga es cero y (*b*) la flecha en el extremo izquierdo es nula. Para expresar la condición (*a*) se usa el primer teorema del área de momentos, obteniéndose una ecuación que contiene las incógnitas R_1 y M_1. Luego se utiliza el segundo teorema para expresar la condición (*b*), lo que da otra ecuación que contiene a R_1 y M_1, resolviéndose después el sistema formado por esas dos ecuaciones. Finalmente, las dos ecuaciones de la estática dan los valores de R_2 y M_2.

La viga continua del tercero de los esquemas anteriores se suele estudiar de un modo algo diferente, utilizando el teorema de los tres momentos, cuya deducción se basa en principios simples de deformaciones. Este teorema se deduce en el Problema 19.



TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS. Una viga continua es aquella que descansa en más de dos apoyos. La viga continua de dos tramos de la figura está sometida a una carga uniforme parcial y a varias fuerzas aisladas. Es conveniente considerar los momentos flectores en los diversos apoyos como incógnitas (en lugar de las propias reacciones) y escribir las ecuaciones de deformaciones en función de esos momentos flectores. Así, se obtiene el teorema de los tres momentos:

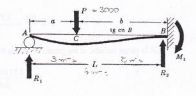
$$M_AL_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_CL_2 = -\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} - \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2}$$

En esta ecuación, M_A, M_B y M_C representan los momentos flectores en los apoyos *A*, *B* y *C*, respectivamente. L_1 y L_2 las longitudes de los tramos, A_1 y A_2 las áreas de los diagramas de momentos dibujados en la hipótesis provisional de estar ***simplemente apoyado*** cada tramo de la viga y $\bar{a}_1$ y $\bar{b}_2$ la distancia de cada centro de gravedad de estos diagramas de momentos a los puntos *A* y *C*, respectivamente. El teorema, expresado en esta forma, es aplicable a todas las vigas continuas que tienen todos los apoyos al mismo nivel. En el Problema 19 se presenta su deducción. Para aplicaciones, véanse los Problemas 20-24.

HIPOTESIS Y LIMITACIONES. Las hipótesis usuales para las tensiones y deformaciones de las vigas, que se vieron en los Capítulos 8, 9 y 10, se aplican a las vigas consideradas en éste. Además, hay que observar que la naturaleza de los apoyos es tal que no se ejercen sobre la viga reacciones horizontales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar la viga apoyada en su extremo izquierdo, empotrada en el derecho y sometida a la carga aislada representada en la figura. Determinar las reacciones R_1, R_2 y M_1.



Por la estática, tenemos



(1) $\Sigma M_B = R_1 L + M_1 - Pb = 0$



(2) $\Sigma F_v = R_1 + R_2 - P = 0$

Es un sistema de fuerzas paralelas, por lo que solo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio. Por tanto, cualquier otra ecuación de equilibrio distinta de las anteriores no será independiente. Pero esas dos ecuaciones contienen las incógnitas R_1, R_2 y M_1, por lo que el sistema es indeterminado y necesitamos añadir otra ecuación que provenga de las deformaciones de la viga. En este caso, solamente es necesario utilizar una ecuación de deformaciones, porque ya tendremos tres con tres incógnitas.

Para obtenerla, examinemos la viga deformada representada por la curva gruesa de la figura anterior. Si se traza una tangente a esta curva en B, esto es, en el extremo empotrado, coincidirá con la posición original de la viga sin flexar. El desplazamiento del extremo A respecto a esta tangente es cero, por lo que podemos aplicar el segundo teorema del área de momentos desarrollado en el Problema 2 del Capítulo 10. En la figura adjunta se muestra el diagrama de momentos dibujado por partes. Por el segundo teorema, estableciendo que el desplazamiento de A desde la tangente en B es nulo y que este desplazamiento está dado por el momento del área del diagrama de momentos anterior entre A y B respecto a la vertical por A, tenemos

$$\frac{1}{2}(R_1 L)(L)(\frac{2}{3}L) + \frac{1}{2}(-Pb)(b)(a + \frac{2}{3}b) = 0 \quad \text{y} \quad R_1 = \frac{3Pb^2}{2L^3}(a + \frac{2}{3}b) = \frac{Pb^2}{2L^3}(2L + a) \qquad (3)$$

Sustituyendo el valor de R_1 en la ecuación (2),

$$R_2 = \frac{Pa}{2L^3}(3L^2 - a^2) \qquad (4)$$

Y llevando estos valores a la ecuación (1),

$$M_1 = \frac{Pa}{2L^2}(L^2 - a^2) \qquad (5)$$

Con lo que quedan totalmente determinadas las reacciones desconocidas.

2. La viga del Problema 1 es un perfil H 180. La carga P es de 3.000 kg. $L = 6$ m, y $a = 3$ m. Determinar las reacciones y la tensión máxima por flexión en la viga.

Sustituyendo en la ecuación (3) del Problema 1, $R_1 = \frac{3.000(3)^2}{2(6)^3}(12 + 3) = 937$ kg.

De la ecuación (4) del Problema 1, tenemos $R_2 = \frac{3.000(3)}{2(6)^3}[3(36) - 9] = 2.062$ kg.

Finalmente, de la ecuación (5) hallamos, $M_1 = \frac{3.000(3)}{2(6)^2}(36 - 9) = 3.375$ kg-m.

Hay que observar que estas expresiones solo son válidas si no se sobrepasa el límite de proporcionalidad del material en ningún punto de la viga, porque para deducir el teorema del área de momentos se hizo esa hipótesis, y en el Problema 1 para hallar las reacciones se usó ese teorema. Por consiguiente, hay que averiguar la tensión máxima por flexión en la viga. Los únicos puntos que hay que considerar son el extremo empotrado y el de aplicación de la carga aislada. De la tabla del final del Capítulo 8 tenemos $I = 3.830$ cm^4 para este perfil.

En el extremo empotrado, el momento flector M_1 da origen a una tensión máxima en las fibras extremas de

$$\sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{3.375(100)(9)}{3.830} = 790 \text{ kg/cm}^2$$

Bajo la carga aislada, el momento flector es 937(3) = 2.811 kg-m. En las fibras extremas, la tensión máxima es

$$\sigma = \frac{2.811(100)(9)}{3.830} = 660 \text{ kg/cm}^2$$

El primer valor es la tensión máxima. Como es menor que el límite de proporcionalidad del acero, está justificado el empleo de las fórmulas usadas para hallar las reacciones.

3. Para la viga del Problema 2, determinar la flecha en el punto de aplicación de la fuerza de 3.000 kg.

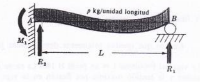
Esta flecha se determina fácilmente mediante el segundo teorema del área de momentos, con el diagrama hallado en el Problema 1, y las reacciones obtenidas en el 2. De acuerdo con el teorema, el desplazamiento del punto C (bajo la carga) respecto a la tangente trazada por B, es igual al momento del área bajo el diagrama M/EI entre C y B respecto a la vertical por C. El área, como se vio en el Problema 1, consta de un rectángulo y dos triángulos. La flecha Δ_C buscada es

$$EI(\Delta_C) = 3(937 \times 3)(1{,}5) + \frac{1}{2}(3)(937 \times 3)(\frac{2}{3} \times 3) + \frac{1}{2}(3)(-3.000 \times 3)(\frac{2}{3} \times 3) = -5.917$$

$$\Delta_C = -\frac{(5.917)(100)^3}{(2{,}1 \times 10^6)(3.830)} = -0{,}736 \text{ cm}$$

Hay que observar que es necesario tomar el factor 100^3 para tener unidades homogéneas, pues -5.917 está en (kg-m^2), mientras que E e I vienen dadas en kg/cm^2 y cm^4, respectivamente.

4. La viga representada en la figura adjunta está empotrada en el extremo izquierdo, apoyada en el derecho y sometida a una carga uniformemente repartida. Determinar las reacciones R_1, R_2 y M_1.

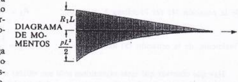


Por la estática, tenemos

(1) $\quad \Sigma F_v = R_1 + R_2 - pL = 0$

(2) $\quad \Sigma M_A = M_1 + R_1 L - pL^2/2 = 0$

También aquí, como en el Problema 1, solo disponemos de dos ecuaciones de la estática para resolver este sistema de fuerzas paralelas. Como contienen tres incógnitas, el sistema es indeterminado y tenemos que examinar las deformaciones de la viga para obtener otra ecuación.



Se ha representado por línea gruesa la viga flexada, y la tangente en el extremo empotrado coincide con la forma de la viga sin flexar. El desplazamiento de B desde la tangente en A es nulo. El diagrama de momentos, trazado por partes, tiene el aspecto indicado en el esquema adjunto.

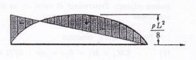
Según el segundo teorema del área de momentos, como el desplazamiento de B respecto a la tangente en A es cero, tenemos

$$(1/2)(R_1L)(L)(2L/3) + (-pL^2/2)(L)(1/3)(3L/4) = 0 \quad \text{y} \quad R_1 = (3/8)pL \qquad (3)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1), hallamos $R_2 = (5/8)pL$ (4)

Finalmente, de la ecuación (2) se obtiene $M_1 = (1/8)pL^2$ (5)

Muchas veces, conviene representar el diagrama de momentos por el procedimiento siguiente, en lugar de dibujarlo por partes como antes. Se considera primero el diagrama parabólico correspondiente a una carga uniformemente repartida que actúa sobre una viga simplemente apoyada, que se obtuvo en el Problema 6 del Capítulo 6. Se vio que la ordenada máxima era $pL^2/8$. Luego hallamos el diagrama triangular debido al par M_1 aplicado en el extremo izquierdo de una viga simplemente apoyada, como se estudió en el Problema 13 del Capítulo 9. A continuación, se halla el diagrama de momentos flectores compuesto, restando el diagrama triangular del parabólico, con el resultado representado en la figura adjunta. Resulta evidente que el momento máximo se produce en el extremo empotrado de la viga.



5. La viga del Problema 4 es un perfil H 180 de longitud 6 m, y la tensión máxima admisible por flexión es de 1.400 kg/cm². Determinar la carga uniforme admisible.

En el Problema 4 se halló que el momento máximo se produce en el extremo empotrado A y que su valor era $M_1 = pL^2/8$.

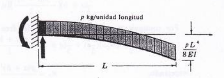
Pero sabemos también que la tensión máxima por flexión en una sección tiene lugar en las fibras extremas y está dada por $\sigma = M_1 v/I$, donde $I = 3.830$ cm⁴, según la tabla del final del Capítulo 8. Sustituyendo,

$$1.400 = \frac{p(600)^2}{8} \cdot \frac{9}{3.830} \quad \text{y} \quad p = 13{,}24 \text{ kg/cm} = 1.324 \text{ kg/m}$$

Es la carga uniforme total, incluyendo el peso propio de la viga. Como dicho peso es de 51,6 kg, la carga uniforme admisible es de (1.324 − 51,6) = 1.272,4 kg/m.

6. Estudiar otro método para determinar las reacciones de la viga uniformemente cargada del Problema 4.

El problema puede resolverse por superposición. Suprimamos, provisionalmente, la reacción R_1 que actúa en el extremo derecho de la barra. La viga actúa entonces como un voladizo sometido a una carga uniformemente repartida, y en el Problema 6 del Capítulo 9 se vio que la flecha del extremo libre de tal viga es $\Delta = \frac{pL^4}{8EI}$. En la figura adjunta se representa esta flecha.



Ahora, consideremos la viga sometida solo a la fuerza aislada R_1 dirigida hacia arriba, aplicada en el extremo derecho. En el Problema 2 del Capítulo 9 se halló que la flecha del extremo libre de esta viga es $\Delta = \frac{R_1L^3}{3EI}$, como se indica en la figura adjunta.

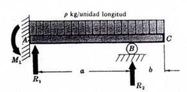
En realidad, ambas cargas actúan sobre la viga simultáneamente, y el valor de R_1 es tal que la flecha

vertical resultante del extremo derecho de la viga es nula. Así,

$$\frac{R_1 L^3}{3EI} = \frac{pL^4}{8EI} \quad \text{y} \quad R_1 = \frac{3}{8}pL$$

Este valor coincide con el hallado en el Problema 4. Conociendo R_1 se hallan R_2 y M_1 por las ecuaciones de la estática *(1)* y *(2)* del Problema 4. Esos valores coinciden, naturalmente, con los que se obtienen de las ecuaciones *(4)* y *(5)* de dicho problema.

7. Considerar la viga con un extremo volado del esquema adjunto. Determinar el valor de las diversas reacciones.



Por la estática, tenemos

(1) $\Sigma M_A = M_1 + R_2 a - p(a+b)^2/2 = 0$

(2) $\Sigma F_v = R_1 + R_2 - p(a+b) = 0$

También ahora tenemos solo dos ecuaciones de equilibrio para este sistema de fuerzas y contienen tres incógnitas, R_1, R_2 y M_1, por lo que el sistema es indeterminado y debemos recurrir a las deformaciones para tener una ecuación más, lo que es posible, pues sabemos que la flecha en el punto B es cero. La tangente trazada por A a la elástica es horizontal y coincide con la posición original de la viga. El diagrama de momentos, trazado por partes (yendo de derecha a izquierda) es el que aparece en el esquema adjunto.

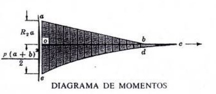


DIAGRAMA DE MOMENTOS

De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento de B desde la tangente en A es igual al momento del área bajo el diagrama de momentos entre A y B respecto a la vertical por B dividido por EI. Esta área consta del triángulo *oab* y la parte del área parabólica *obde* representada en el diagrama anterior. El momento del área triangular respecto a la vertical por B es

$$(1/2)(a)(R_2 a)(2a/3)$$

Para el área parabólica, conviene restar el momento del área *bdc* (respecto a la vertical por B) del momento de *obcde* (respecto a la misma vertical). Cada una de estas dos últimas áreas tiene altura negativa (pues la carga uniforme dirigida hacia abajo da origen a un momento flector negativo), pero conviene observar que el brazo del momento de *obcde* es positivo, mientras que el de *bdc* es negativo. Por tanto, el momento de *obde* es

$$\frac{1}{3}(a+b)[-\frac{p(a+b)^2}{2}][a-(\frac{a+b}{4})] - \frac{1}{3}(b)[-\frac{pb^2}{2}][-\frac{b}{4}]$$

Por consiguiente, el segundo teorema del área de momentos dice que

$$\frac{1}{2}(a)(R_2 a)(\frac{2}{3}a) + \frac{1}{3}(a+b)[-\frac{p(a+b)^2}{2}][a-(\frac{a+b}{4})] - \frac{1}{3}(b)[-\frac{pb^2}{2}][-\frac{b}{4}] = 0$$

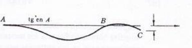
Despejando,
$$R_2 = \frac{p(a+b)^3}{2a^2} - \frac{p(a+b)^4}{8a^3} + \frac{pb^4}{8a^3} \qquad (3)$$

De la ecuación *(1)*,
$$M_1 = \frac{p(a+b)^2}{2} - \frac{p(a+b)^3}{2a} + \frac{p(a+b)^4}{8a^2} - \frac{pb^4}{8a^2} \qquad (4)$$

Finalmente, de la ecuación *(2)*,
$$R_1 = p(a+b) - \frac{p(a+b)^3}{2a^2} + \frac{p(a+b)^4}{8a^3} - \frac{pb^4}{8a^3} \qquad (5)$$

8. Determinar la flecha del extremo derecho C de la viga del Problema 7.

Bajo la acción de la carga uniforme, la elástica de la viga tiene el aspecto indicado en la figura adjunta. Hay que observar que, aunque el desplazamiento vertical del punto B es nulo, no hay ninguna razón para suponer que la tangente a la elástica en ese punto sea horizontal.



Conviene considerar, pues, la tangente trazada en el extremo empotrado A, que es horizontal. De acuerdo con el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento buscado de C desde la tangente trazada en A es igual al momento respecto a la vertical por C del área bajo el diagrama de momentos total entre A y C dividido por EI. Hay que tener en cuenta que este teorema es válido aunque la viga sea estáticamente indeterminada. Así, pues, con referencia al diagrama de momentos del Problema 7, tenemos

$$EI(\Delta_C) = +\frac{1}{2}(a)(R_2 a)(b + \frac{2}{3}a) + \frac{1}{3}(a+b)[-\frac{p}{2}(a+b)^2](\frac{3}{4})(a+b)$$

Sustituyendo el valor de R_2 hallado en el Problema 7, y simplificando,

$$\Delta_C = \frac{pa^3b}{48EI} - \frac{pa^2b^2}{2EI} - \frac{pab^3}{8EI} - \frac{pb^4}{6EI}$$

9. La viga uniformemente cargada está empotrada en ambos extremos, como se indica en la Fig. (a). Determinar las reacciones.

Por simetría, las fuerzas de reacción serán iguales en los dos extremos, y las representaremos por R_1. También los momentos de reacción serán iguales, y se representarán por M_1. Por la estática, tenemos

$(1)\quad \Sigma F_v = 2R_1 - pL = 0 \quad$ y $\quad R_1 = pL/2$

Fig. (a)

Aunque inicialmente podemos disponer de dos ecuaciones de equilibrio estático para este sistema de fuerzas paralelas, ya hemos utilizado una de ellas cuando hemos hecho uso de las consideraciones de simetría. Por ello, para determinar M_1 tenemos que examinar las deformaciones del sistema, lo que nos proporcionará la otra ecuación que necesitamos para completar el análisis de este sistema estáticamente indeterminado.

Fig. (b)

La viga flexada tiene el aspecto simétrico indicado en la Fig. (b). Como los dos extremos están empotrados, la tangente a la curva en el extremo izquierdo A coincide con la trazada en el derecho B, y ambas son horizontales. Podemos, pues, utilizar el segundo teorema del área de momentos, que dice que el desplazamiento de B desde la tangente trazada por A es igual al momento respecto a la vertical por B del área bajo el diagrama de momentos flectores entre A y B dividido por EI. El diagrama, trazado por partes, yendo de izquierda a derecha, es como en la Figura (c).

Fig. (c)

Por tanto, por el segundo teorema del área de momentos, tenemos

$$\frac{1}{2}(L)(R_1 L)(\frac{L}{3}) + L(-M_1)(\frac{L}{2}) + \frac{1}{3}(L)(-\frac{pL^2}{2})(\frac{L}{4}) = 0$$

Fig. (d)

Sustituyendo R_1 de la ecuación (1) y despejando, se tiene

$(2)\quad M_1 = pL^2/12$

Se halla fácilmente que el momento flector en el centro del vano es $pL^2/24$. Muchas veces conviene presentar el diagrama de momentos en forma compuesta, en lugar de por partes como antes. Para ello, se superpone al

diagrama parabólico debido a la carga uniforme, como si actuase sobre una viga simplemente apoyada, el rectangular correspondiente a los momentos en los extremos. De acuerdo con el criterio de signos del Capítulo 6, esos momentos en los extremos son negativos. Por tanto, el diagrama de momentos resultante corresponde al área sombreada de la Fig. (*d*) anterior.

10. Determinar la flecha en el centro de la viga empotrada del Problema 9.

Se halla esta flecha aplicando el segundo teorema del área de momentos entre el extremo izquierdo *A* y el punto medio de la viga *C*. La flecha buscada está dada por el desplazamiento de *C* desde la tangente en *A*, que es igual al momento respecto a la vertical por *C* del área bajo el diagrama de momentos entre *A* y *C*, dividido por *EI*. Con referencia al diagrama de momentos dibujado por partes en el Problema 9, tenemos, para la flecha buscada,

$$EI(\Delta_C) = \frac{1}{2}(\frac{L}{2})(\frac{1}{2})(R_1 L)(\frac{L}{6}) + \frac{L}{2}(-\frac{pL^2}{12})(\frac{L}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{L}{2})(-\frac{pL^2}{8})(\frac{L}{8})$$

Sustituyendo el valor de R_1 hallado en el Problema 9, tenemos $\Delta_C = \dfrac{-pL^4}{384EI}$. El signo menos indica que la posición final de *C* está por debajo de la tangente en *A*.

11. La viga empotrada del Problema 9 es un perfil H 220 de 6 m de longitud. Determinar la carga uniforme admisible si la tensión máxima por flexión posible es de 1.400 kg/cm². ¿Cuál es la flecha en el centro para esta carga?

Del diagrama de momentos flectores hallado en el Problema 9 se ve que el momento máximo tiene lugar en cada uno de los extremos y vale $pL^2/12$. La tensión de flexión en las fibras extremas está dada por $\sigma = Mv/I$, donde $I = 8.050$ cm⁴, según la tabla del final del Capítulo 8. Sustituyendo,

$$1.400 = \frac{p(600)^2}{12} \cdot \frac{11}{8.050} \quad \text{y} \quad p = 34 \text{ kg/cm} = 3.400 \text{ kg/m}$$

Por el Problema 10 se halla que la flecha en el centro es

$$\Delta_C = -\frac{pL^4}{384EI} = -\frac{34(600)^4}{384(2{,}1 \times 10^6)(8.050)} = -0{,}68 \text{ cm}$$

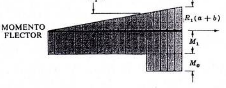
12. La viga empotrada de la figura está sometida al par M_0 representado. Determinar todas las reacciones.

En línea gruesa se ha representado la forma de la deformada. Para que haya equilibrio vertical, las fuerzas de reacción en cada extremo han de ser iguales y las representaremos por R_1. Además, para el equilibrio estático, tenemos

(*1*) $\Sigma M_A = M_1 + M_2 + M_0 - R_1(a + b) = 0$

Esta ecuación contiene a R_1, M_1 y M_2 como incógnitas, y como no disponemos de más ecuaciones de la estática, el problema es estáticamente indeterminado, por lo que necesitamos suplementarla con otras dos provinientes de las deformaciones del sistema.

A la derecha se muestra el diagrama de momentos, trazado por partes (yendo de izquierda a derecha).



La primera de las ecuaciones se halla teniendo en cuenta que la tangente a la elástica en *A* permanece horizontal, por lo que el desplazamiento del extremo derecho de la viga, *C*, desde la tangente en *A* es nulo. Empleando el segundo teorema del área de momentos entre los puntos *A* y *C*, tenemos

(2) $$\frac{1}{2}(a+b)[R_1(a+b)](\frac{a+b}{3}) + (a+b)(-M_1)(\frac{a+b}{2}) + b(-M_0)(\frac{b}{2}) = 0$$

Quizá se halle más fácilmente la segunda ecuación, estableciendo que, como ambos extremos están empotrados, el ángulo entre las tangentes en A y C es nulo. En la realidad, dichas tangentes coinciden con la forma recta original de la viga. Ahora podemos aplicar el primer teorema del área de momentos entre los puntos A y C, expresando que el ángulo entre las tangentes en esos puntos es igual al área del diagrama de momentos flectores entre ellos, dividida por EI. Así,

(3) $$\frac{1}{2}(a+b)[R_1(a+b)] + (a+b)(-M_1) + b(-M_0) = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3), hallamos

(4) $R_1 = \dfrac{6M_0ab}{(a+b)^3}$, (5) $M_1 = \dfrac{M_0(2ab-b^2)}{(a+b)^2}$, (6) $M_2 = \dfrac{M_0(2ab-a^2)}{(a+b)^2}$

Debe tenerse muy en cuenta que no existe razón para suponer que el desplazamiento vertical del punto B, de aplicación del par M_0, sea nulo.

13. Determinar la flecha del punto de aplicación, B, del par M_0, en el Problema 12.

Se determina con gran facilidad, pues es igual al desplazamiento del punto B desde la tangente trazada por A, tangente que permanece horizontal durante la deformación de la viga. Por el segundo teorema del área de momentos, el desplazamiento de B desde la tangente en A está dado por el momento respecto a la vertical por B del área del diagrama de momentos flectores entre A y B dividido por EI. Con referencia al diagrama representado en el Problema 12, tenemos

$$EI(\Delta_B) = \tfrac{1}{2}(a)(R_1a)(a/3) + a(-M_1)(a/2)$$

Sustituyendo los valores de R_1 y M_1 hallados en el Problema 12, tenemos $\Delta_B = \dfrac{M_0a^2b^2(b-a)}{2(a+b)^3EI}$.

14. La viga empotrada del Problema 12 es un perfil H 200. El par está aplicado en un punto B tal que a = 1,20 m, b = 3 m. Si la tensión máxima por flexión admisible es de 1.250 kg/cm², determinar el mayor valor posible de M_0 junto con la flecha en el punto B cuando está aplicado el par.

Primero determinaremos las reacciones en función de M_0, de las ecuaciones (4), (5) y (6) del Problema 12. Son

$$R_1 = \frac{6M_0(1{,}20)(3)}{(1{,}20+3)^3} = 0{,}2915M_0$$

$$M_1 = \frac{M_0[(2)(1{,}20)(3) - (3)^2]}{(1{,}20+3)^2} = -0{,}1020M_0$$

$$M_2 = \frac{M_0[(2)(1{,}20)(3) - (1{,}20)^2]}{(1{,}20+3)^2} = 0{,}3265M_0$$

Expresaremos M_0 en kg-m. Aunque el determinar el diagrama de momentos flectores compuesto no es demasiado largo, quizá sea más sencillo considerar que, como no hay cargas repartidas, las variaciones de los momentos a lo largo de la viga han de ser funciones lineales, esto es, que el diagrama compuesto de momentos constará de cierto número de segmentos rectilíneos. Evidentemente, solo necesitamos calcular el momento flector en cuatro puntos críticos: (a) el extremo izquierdo del vano, (b) su extremo derecho, (c) el punto inmediatamente a la izquierda de B y (d) el punto inmediatamente a la derecha de B.

Los momentos flectores en los extremos izquierdo y derecho están dados por $-0{,}102M_0$ y $0{,}326M_0$, respectivamente. En el punto inmediatamente a la izquierda de B, el momento es

$$0{,}1020M_0 + (0{,}2915M_0)(1{,}20) = 0{,}452M_0$$

En el punto inmediatamente a la derecha de B, el momento vale

$$0{,}3265M_0 - (0{,}2915M_0)(3) = -0{,}548M_0$$

Este último valor es, evidentemente, el momento flector máximo en la viga. La tensión máxima se producirá en las fibras extremas y estará dada por $\sigma = Mv/I$. Sustituyendo y tomando $I = 5.950$ cm^4 de la tabla del final del Capítulo 8, tenemos

$$1.250 = \frac{(0{,}548M_0)(100)(10)}{5.950} \quad \text{y} \quad M_0 = 13.570 \text{ kg-m}$$

La flecha en el punto de aplicación del momento se determinó en el Problema 13. Es

$$\Delta_B = \frac{M_0 a^2 b^2 (b-a)}{2(a+b)^3 EI} = \frac{(13.570)(100)(120)^2(300)^2(180)}{2(420)^3(2{,}1 \times 10^6)(5.950)} = 0{,}190 \text{ cm}$$

15. La viga empotrada de la Fig. (*a*) está sometida a una fuerza aislada en el centro, como puede verse. Determinar las reacciones.

Por simetría, las reacciones son iguales en los dos extremos, y las representaremos por R_1 y M_1. Por la estática, tenemos

Fig. (*a*)

(*1*) $\quad \Sigma F_v = 2R_1 - P = 0 \quad$ y $\quad R_1 = P/2$

Al hacer uso de las consideraciones sobre la simetría, hemos utilizado ya una ecuación de equilibrio, por lo que ya no disponemos para este sistema de más ecuaciones de la estática. Por tanto, el problema es estáticamente indeterminado y para determinar M_1 tenemos que examinar las deformaciones del sistema.

La elástica de la viga tiene el aspecto indicado por la línea gruesa de la Fig. (*a*). Las tangentes en los extremos empotrados A y C siguen siendo horizontales y coinciden con la posición original de la viga antes de la deformación. Por tanto, el ángulo entre dichas tangentes es nulo. En la Fig. (*b*) se muestra el diagrama de momentos flectores trazado por partes (de izquierda a derecha).

De acuerdo con el primer teorema del área de momentos, el ángulo entre las tangentes es A y C es igual al área bajo el diagrama de momentos entre A y C, dividida por EI. Así, pues,

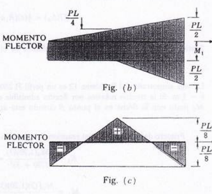


Fig. (*b*)

Fig. (*c*)

(*2*) $\quad \frac{1}{2}(L)(PL/2) + L(-M_1) + \frac{1}{2}(L/2)(-PL/2) = 0 \quad$ y $\quad M_1 = PL/8$

Se halla que el momento flector en el medio del vano es $PL/8$. A veces es preferible, también, presentar el diagrama de momentos en forma compuesta en lugar de por partes, como más arriba. Para ello, se superpone al diagrama triangular, debido a una carga aislada que actúa sobre una viga simplemente apoyada, el rectangular correspondiente a los momentos extremos. De acuerdo con el criterio de signos del Capítulo 6, estos momentos extremos son negativos. El diagrama resultante es el correspondiente a la zona rayada de la Figura (*c*).

16. Determinar la flecha en el centro de la viga del Problema 15.

Esta flecha puede hallarse aplicando el segundo teorema del área de momentos entre el extremo izquierdo A y el punto medio de la viga B. La flecha buscada está dada por el desplazamiento de B desde la tangente traza-

da por A, que es igual al momento respecto a la vertical por B del área bajo el diagrama de momentos entre A y B dividido por EI. Considerando el diagrama de momentos del Problema 15 tenemos

$$EI(\Delta_B) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{L}{2}\right)\left(\frac{PL}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right) + \frac{L}{2}(-M_1)\left(\frac{L}{4}\right)$$

Sustituyendo el valor de M_1 hallado en el Problema 15, obtenemos $\Delta_B = -\dfrac{PL^3}{192EI}$. El signo menos indica que la posición final de B está debajo de la tangente en A.

17. La longitud de la viga empotrada del Problema 15 es de 4,50 m y la carga centrada de 12.000 kg. Elegir un perfil H para soportar esta carga sin exceder de una tensión de trabajo de 1.250 kg/cm². Determinar también la flecha en el punto de aplicación de la carga.

Como se vio en el diagrama compuesto de momentos del Problema 15, el momento flector adopta valores máximos en ambos extremos de la viga, así como en su punto medio, y esos valores son $PL/8$. En las fibras extremas, la tensión es $\sigma = Mr/I = M/W$, donde W representa el módulo de la sección de la viga. Sustituyendo,

$$1.250 = \frac{(12.000)(4{,}50)(100)}{8W} \quad \text{y} \quad W = 540 \text{ cm}^3$$

En la tabla del final del Capítulo 8 se ve que es apropiado el perfil H 200 para soportar esta carga. Tiene $W = 595$ cm³ y para él $I = 5.950$ cm⁴.

En el Problema 16 se halló que la flecha en el centro es

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{192EI} = \frac{(12.000)(450)^3}{(192)(2{,}1 \times 10^6)(5.950)} = -0{,}456 \text{ cm}$$

18. La viga horizontal representada en la Fig. (a) está simplemente apoyada en los extremos y unida en el centro a un vástago vertical elástico compuesto. Los apoyos de la viga y la parte superior de la varilla de cobre están originalmente a la misma altura, en cuyo momento la viga es horizontal. La temperatura de las varillas verticales disminuye 55° C. Hallar las tensiones en cada una de las varillas despreciando sus pesos propios y el de la viga. La sección de la varilla de cobre es de 6 cm². $E_{cu} = 1{,}05 \times 10^6$ kg/cm² y $\alpha_{cu} = 16 \times 10^{-6}$/°C. La sección de la varilla de aluminio es de 12 cm². $E_{al} = 0{,}7 \times 10^6$ kg/cm y $\alpha_{al} = 22{,}2 \times 10^{-6}$/°C. Para la viga, $E = 1{,}05 \times 10^5$ kg/cm² e $I = 40.000$ cm⁴.

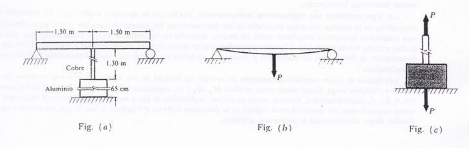


Fig. (a) Fig. (b) Fig. (c)

En la Fig. (b) aparece un esquema de cuerpo en libertad de la viga horizontal. En él, P representa la fuerza que ejerce la varilla de cobre sobre la viga. Como esta fuerza es desconocida inicialmente, sobre la viga actúan tres fuerzas, y para el sistema de fuerzas paralelas solo disponemos de dos ecuaciones de equilibrio, por lo que el problema es estáticamente indeterminado. Por tanto, es necesario considerar las deformaciones del sistema.

En la Fig. (c) se muestra un esquema de cuerpo en libertad de las dos varillas verticales.

El método más sencillo consiste en cortar provisionalmente la unión entre la varilla de cobre y la viga y permitir que las dos varillas verticales contraigan libremente a causa del descenso de temperatura. Si la viga horizontal no ofrece resistencia, la varilla de cobre contraerá

$$\Delta_{cu} = (16 \cdot 10^{-6})(130)(55) = 0{,}1144 \text{ cm}$$

y la de aluminio,

$$\Delta_{al} = (22{,}2 \cdot 10^{-6})(65)(55) = 0{,}0794 \text{ cm}$$

Pero, como puede verse en la Fig. (*c*), la viga ejerce una tracción *P* sobre la varilla de cobre, y la misma fuerza actúa sobre la de aluminio. Estas fuerzas axiales alargan las varillas en una cantidad (véase Problema 1 del Capítulo 1) $\dfrac{P(130)}{(6)(1{,}05 \times 10^6)} + \dfrac{P(65)}{(12)(0{,}7 \times 10^6)}$

La fuerza *P* dirigida hacia abajo que ejerce la varilla de cobre sobre la viga produce una deformación de la misma. En el Capítulo 10, Problema 9, se halló que esta deformación o flecha debida a una carga centrada es $\Delta = PL^3/48EI$.

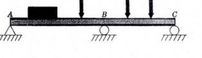
Indudablemente, en la realidad no está cortada la unión entre la varilla de cobre y la viga horizontal y el acortamiento resultante de las varillas verticales es igual a la flecha del punto medio de la viga. La variación de longitud de las varillas es debida parte al descenso de temperatura y parte a la fuerza axial que actúa en ellas. Para que el acortamiento de las varillas sea igual a la flecha de la viga deberemos tener

$$[0{,}1144 + 0{,}0794] - \frac{P(130)}{(6)(1{,}05 \times 10^6)} + \frac{P(65)}{(12)(0{,}7 \times 10^6)} = \frac{P(300)^3}{(48)(1{,}05 \times 10^5)(40.000)}$$

Despejando, $P = 1.195$ kg y $\sigma_{cu} = 1.195/6 = 199$ kg/cm², $\sigma_{al} = 1.195/12 = 100$ kg/cm².

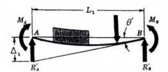
19. Deducir el teorema de los tres momentos para las vigas continuas.

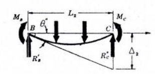
Una viga continua es la que descansa en más de dos apoyos. En la figura adjunta aparece un ejemplo constituido por una viga de dos tramos sometida a una serie de cargas uniforme y aisladas. Se supondrá que la naturaleza de los apoyos es tal que no se presentan reacciones horizontales.



Las vigas continuas son estáticamente indeterminadas, por lo que es necesario suplementar las ecuaciones disponibles de la estática con otras deducidas de las deformaciones del sistema. Un posible medio para obtener esas ecuaciones consiste en considerar todas las fuerzas verticales en los distintos apoyos como incógnitas, pero es más sencillo tomar como tales a los momentos flectores en dichos puntos. Se escriben las ecuaciones de las deformaciones, se determinan los momentos y, finalmente, se hallan las reacciones. Aquí emplearemos este último procedimiento.

Las figuras de abajo representan esquemas de cuerpos en libertad de dos tramos de una viga continua sometida a cualquier carga. Como puede verse en ellos, M_A, M_B y M_C representan los momentos flectores en los apoyos *A*, *B* y *C*, respectivamente. Aunque, como es natural, la dirección de estos momentos es función de las cargas, hemos supuesto que son positivos en el sentido de la definición dada en el Capítulo 6, por lo que los sentidos indicados abajo corresponden a momentos positivos.





La pendiente de la elástica debe ser continua en el apoyo central, por lo que

$$\theta' = -\theta''$$

Ahora se determinarán los valores de esos ángulos por el método del área de momentos.

Consideraremos primero las diversas cargas que actúan en las vigas simplemente apoyadas correspondientes, esto es, provisionalmente suprimiremos los momentos M_A, M_B y M_C. Por los métodos del Capítulo 6 se pueden determinar los diagramas de momentos flectores de cada uno de los tramos L_1 y L_2, que se representan simbólicamente como sigue:





En estos esquemas, G_1 y G_2 representan los centros de gravedad de las áreas de los diagramas de momentos, y $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{a}_2$ y $\bar{b}_2$ tienen el significado indicado. Hay que observar que se han determinado esos diagramas en la hipótesis de estar simplemente apoyado cada uno de los tramos. Expresaremos por A_1 y A_2 las áreas de esos diagramas de momentos para los tramos izquierdo y derecho, respectivamente

El desplazamiento de A desde la tangente en B, según el segundo teorema del área de momentos, es $\Delta_1 = \dfrac{A_1\bar{a}_1}{EI}$, por lo que la pendiente θ' vale $\theta' = \dfrac{A_1\bar{a}_1}{L_1EI}$

Ahora tenemos que considerar los efectos de M_A y M_B sobre la pendiente θ' en el tramo izquierdo. Según el Problema 13 del Capítulo 9, el giro del tramo izquierdo en el punto B, producido por esos momentos es

$$\frac{M_BL_1}{3EI} + \frac{M_AL_1}{6EI}$$

El ángulo de giro total es, pues, la suma, o sea,

$$\theta' = \frac{A_1\bar{a}_1}{L_1EI} + \frac{M_BL_1}{3EI} + \frac{M_AL_1}{6EI}$$

De igual modo, para el tramo derecho tenemos

$$\theta'' = \frac{A_2\bar{b}_2}{L_2EI} + \frac{M_BL_2}{3EI} + \frac{M_CL_2}{6EI}$$

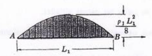
Sustituyendo en la relación $\theta' = -\theta''$, hallamos

$$M_AL_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_CL_2 = -\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} - \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2}$$

Este es el teorema de los tres momentos, aplicable en esta forma general a todo tipo de solicitaciones. La aplicación de esta ecuación a una viga continua, junto con las ecuaciones de la estática, permite hallar las diversas reacciones. A la ecuación anterior se le llama a veces ecuación de Clapeyron.

20. Estudiar la forma particular del teorema de los tres momentos para cargas uniformemente repartidas sobre dos tramos contiguos.

Nos referiremos a los diagramas del Problema 19. Sea p_1 la intensidad de la carga uniforme que actúa en el tramo izquierdo, y p_2 la del tramo derecho. Si se considera que cada una de estas cargas actúa en un tramo simplemente apoyado de luz L_1 y L_2, respectivamente, los diagramas de momentos flectores son parabólicos, como se muestra abajo. En el Problema 6 del Capítulo 6 se halló que las ordenadas máximas tienen los valores indicados





En el Problema 3 del Capítulo 10 se vio que el área bajo esa parábola es los 2/3 de la del rectángulo que la envuelve, por lo que, como A_1 expresa el área del diagrama de momentos de la izquierda, tenemos

$$A_1 = \frac{2}{3}(L_1)\left(\frac{p_1L_1^2}{8}\right) \quad \text{y, análogamente,} \quad A_2 = \frac{2}{3}(L_2)\left(\frac{p_2L_2^2}{8}\right)$$

Los centros de gravedad de estas áreas están situados en el punto medio de los tramos.

Sustituyendo esos valores en el segundo miembro de la expresión general del teorema de los tres momentos estudiada en el Problema 19, hallamos

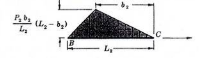
$$M_AL_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_CL_2 = -\frac{p_1L_1^3}{4} - \frac{p_2L_2^3}{4}$$

Esta es la expresión de la ecuación de los tres momentos para cargas uniformemente repartidas.

21. Determinar la forma particular del teorema de los tres momentos para una sola carga aislada en cada uno de los dos tramos contiguos.

Nos referiremos nuevamente al diagrama del Problema 19. Sea P_1 la carga aislada que actúa en el tramo izquierdo, a_1 la distancia de esta carga al apoyo izquierdo A y P_2 la fuerza aislada que actúa en el tramo derecho a la distancia b_2 del apoyo C. Si se considera que cada una de esas dos cargas actúa sobre un tramo simplemente apoyado de longitud L_1 y L_2, respectivamente, los diagramas de momentos son triangulares como se indica abajo.





En la forma general del teorema de los tres momentos que se presentó en el Problema 19 aparece la cantidad $A_1\bar{a}_1$, que representa para el tramo izquierdo el momento del área bajo el diagrama de momentos dado más arriba respecto a la vertical por el extremo izquierdo A. Pero para el diagrama de que se trata, se puede hallar más fácilmente descomponiendo el triángulo en otros dos, uno de ellos con base igual a a_1 y el otro con base $(L_1 - a_1)$. El producto del área de cada uno de estos triángulos por la distancia de su centro de gravedad a la vertical por A, nos da el producto $A_1\bar{a}_1$ buscado. Así, pues,

$$A_1\bar{a}_1 = \frac{1}{2}(a_1)\left(\frac{P_1a_1}{L_1}\right)(L_1 - a_1)\left(\frac{2}{3}a_1\right) + \frac{1}{2}(L_1 - a_1)\left[\left(\frac{P_1a_1}{L_1}\right)(L_1 - a_1)\right]\left[a_1 + \frac{1}{3}(L_1 - a_1)\right]$$

y de aquí, simplificando, obtenemos $\dfrac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = \dfrac{P_1a_1}{L_1}(L_1^2 - a_1^2)$.

De igual modo, para el tramo derecho L_2 hallamos $\dfrac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = \dfrac{P_2b_2}{L_2}(L_2^2 - b_2^2)$.

Por tanto, para varias cargas aisladas, el teorema de los tres momentos se expresa:

$$M_AL_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_CL_2 = -\sum\frac{P_1a_1}{L_1}(L_1^2 - a_1^2) - \sum\frac{P_2b_2}{L_2}(L_2^2 - b_2^2)$$

donde el signo de sumación sirve para incluir los efectos de todas las cargas aisladas.

22. La viga continua de dos tramos de la Fig. (*a*) de la página siguiente soporta una carga uniforme de p kg por unidad de longitud. Determinar las reacciones.

Es aplicable el teorema de los tres momentos en la forma indicada en el Problema 20. Aquí, la carga es cons-

tante a lo largo de toda la viga y $p_1 = p_2 = p$. Además, $L_1 = L_2 = L$. Los extremos A y C están simplemente apoyados, por lo que $M_A = M_C = 0$. Sustituyendo en el teorema de los tres momentos,

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{p_1 L_1^3}{4} - \frac{p_2 L_2^3}{4}$$

obtenemos $$0 + 2M_B(2L) + 0 = -\frac{pL^3}{4} - \frac{pL^3}{4}$$

o $$M_B = -\frac{pL^2}{8}$$

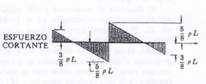


Fig. (a)

Quizá el método más sencillo para determinar las reacciones sea escribir la expresión del momento flector en B (que ya se ha determinado) en función de los momentos de las fuerzas a la izquierda de B. Así,

$$R_1 L - pL\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^2}{8} \quad \text{y} \quad R_1 = \frac{3}{8}pL$$

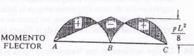


Fig. (b)

Las fuerzas en los extremos representadas por R_1 son iguales, por simetría. De la estática,

$$2\left(\frac{3}{8}pL\right) + R_2 - 2pL = 0 \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{5}{4}pL$$

Ahora puede trazarse ya el diagrama de esfuerzos cortantes por el método ordinario del Capítulo 6 y tiene el aspecto indicado en la Figura (*b*).

MOMENTO FLECTOR

$\frac{pL^2}{8}$

A B C

Fig. (c)

También se puede dibujar el diagrama de momentos por los procedimientos del Capítulo 6, pero para las vigas continuas es algo más sencillo trazarlo considerando el diagrama de cada tramo para la carga correspondiente, suponiéndole simplemente apoyado. Indudablemente, es parabólico para la carga uniforme. Luego se construye el diagrama de momentos debidos a los momentos en los apoyos, que tienen valor cero en los extremos de la viga y $-pL^2/8$ en el punto B. Por el Problema 13 del Capítulo 9 resulta evidente que la variación del momento desde cada extremo de la viga hasta el punto medio (a causa del momento $-pL^2/8$ *solo*) es lineal, es decir, que deben unirse con rectas el valor del momento en el punto medio con los de los extremos que son cero. Además, los diagramas de momentos debidos a la carga uniforme son positivos, mientras que los debidos a M_B son negativos. Por superposición de esos diagramas, aparece la forma final que se representa por las áreas rayadas de la Figura (*c*).

23. La viga continua de dos tramos de la Fig. (*a*) soporta las cargas centradas indicadas. Determinar las reacciones.

Es aplicable el teorema de los tres momentos para cargas aisladas dado en el Problema 21. Aquí, $P_1 = P_2 = P$, $L_1 = L_2 = L$ y $a_1 = b_2 = L/2$. Los extremos A y C están simplemente apoyados, por lo que $M_A = M_C = 0$. Sustituyendo en el teorema de los tres momentos,

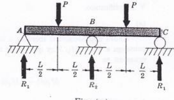


Fig. (a)

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\sum \frac{P_1 a_1}{L_1}(L_1^2 - a_1^2) - \sum \frac{P_2 b_2}{L_2}(L_2^2 - b_2^2)$$

obtenemos $$0 + 2M_B(2L) + 0 = -\frac{2P(L/2)}{L}(L^2 - L^2/4) \quad \text{y} \quad M_B = -\frac{3}{16}PL.$$

Ahora podemos expresar este momento flector en B en función de los momentos de las fuerzas a la izquierda de B, como sigue:

$$R_1 L - \frac{PL}{2} = -\frac{3PL}{16} \quad \text{y} \quad R_1 = \frac{5}{16}P$$

Las fuerzas en los extremos, representadas por R_1, son iguales por simetría. De la estática,

$$2(\frac{5P}{16}) + R_2 - 2P = 0 \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{11}{8}P$$

Por tanto, el diagrama de cortantes es como el de la Figura (*b*).

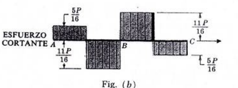


Fig. (*b*)

El diagrama de momentos puede trazarse por el procedimiento indicado en el Problema 22. El diagrama correspondiente a cada tramo, en la hipótesis de estar simplemente apoyado, es un triángulo de altura $PL/4$. Luego se traza el debido a los momentos en los apoyos, que varía linealmente desde cero en ambos extremos de la viga hasta un valor de $-3PL/16$ en el punto medio *B*. Los diagramas de momentos debidos a las cargas aisladas son positivos, mientras que los debidos a M_B son negativos. La superposición de estos diagramas origina la forma final del diagrama de momentos, tal como se representa en las áreas sombreadas de la Figura (*c*).

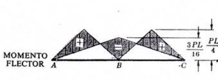
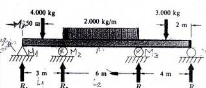


Fig. (*c*)

24. La viga continua de tres tramos de la figura está sometida a la carga uniforme y a las dos cargas aisladas indicadas. Determinar las reacciones.



Expresaremos los momentos en los apoyos, de izquierda a derecha, por M_1, M_2, M_3 y M_4, respectivamente. Tenemos inmediatamente que $M_1 = M_4 = 0$, pues esos extremos están simplemente apoyados.

Aplicaremos primero el teorema de los tres momentos a los tramos izquierdo y central, lo que dará origen, indudablemente, a una ecuación con las incógnitas M_2 y M_3. Como estos dos tramos están sometidos a una carga aislada y una uniforme, respectivamente, son aplicables las expresiones particulares del teorema de los tres momentos obtenidas en los Problemas 20 y 21. Tomaremos $L_1 = 3$ m, $L_2 = 6$ m, y tendremos

$$0 + 2M_2(3 + 6) + M_3(6) = -\frac{4.000(1{,}50)}{3}[(3)^2 - (1{,}50)^2] - \frac{2.000(6)^3}{4}$$

Y simplificando,

(*a*) $$3M_2 + M_3 = -2.250 - 18.000$$

Ahora aplicaremos el teorema a los tramos central y derecho, con lo que obtendremos otra ecuación que contenga a M_2 y M_3. Hay que fijarse con cuidado en que ahora tenemos que tomar $L_1 = 6$ m, $L_2 = 4$ m. La ecuación es

$$M_2(6) + 2M_3(6 + 4) + 0 = -\frac{2.000(6)^3}{4} - \frac{3.000(2)}{4}[(4)^2 - (2)^2]$$

Y simplificando,

(*b*) $$M_2 + 3{,}33M_3 = -18.000 - 3.000$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*a*) y (*b*), hallamos $M_2 = -5.167$ kg-m y $M_3 = -4.750$ kg-m.

Podemos expresar el momento flector M_2 en función de los momentos de las fuerzas a la izquierda de esta reacción, como sigue:

$$3R_1 - 4.000(1{,}50) = -5.167 \quad \text{y} \quad R_1 = 278 \text{ kg}$$

De igual modo para el momento M_3 en el apoyo 3,

$$9(278) + 6R_2 - 4.000(7{,}50) - 2.000(6)(3) = -4.750 \quad \text{y} \quad R_2 = 9.792 \text{ kg}$$

Yendo desde el extremo derecho, $4R_4 - 3.000(2) = -4.750$ y $R_4 = 312$ kg.

Finalmente, $10(312) + 6R_3 - 2.000(6)(3) - 3.000(8) = -5.167$ y $R_3 = 8.618$ kg.

Hay que hacer notar que, si se hubiera querido, para determinar R_3 y R_4 se podrían haber utilizado dos ecuaciones del equilibrio estático en lugar de las dos últimas, pero el método usado tiene la ventaja de que todavía podemos disponer de esas ecuaciones estáticas para comprobar los resultados obtenidos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

25. La viga de la Fig. (*a*) está apoyada en el extremo derecho, empotrada en el izquierdo y soporta las dos cargas aisladas que se indican. Determinar la reacción en el muro y en el extremo derecho de la viga.
Sol. $4P/3$ hacia arriba en el extremo izquierdo, $PL/3$ en sentido contrario a las agujas del reloj en el extremo izquierdo, $2P/3$ hacia arriba en el extremo derecho

26. Determinar la flecha en el punto de aplicación de la fuerza P situada a la distancia $L/3$ del extremo derecho de la viga descrita en el Problema 25. *Sol.* $7PL^3/486EI$

27. La viga del Problema 25 es un perfil H 220. La longitud es de 5 m y la tensión máxima admisible 1.250 kg/cm². Determinar el mayor valor posible de cada carga P. *Sol.* 5.490 kg

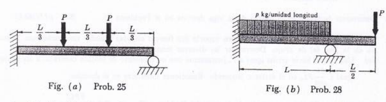
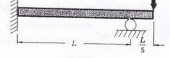


Fig. (*a*) Prob. 25 Fig. (*b*) Prob. 28

28. La viga de la Fig. (*b*) está apoyada en un punto intermedio y cargada como se indica. Determinar las diversas reacciones.
Sol. $(\frac{5}{8}pL - \frac{3}{4}P)$ hacia arriba en el extremo izquierdo, $(\frac{1}{8}pL^2 - \frac{1}{4}PL)$ en sentido contrario a las agujas del reloj, en el extremo izquierdo, y $(\frac{3}{8}pL + \frac{7}{4}P)$ hacia arriba, en el apoyo

29. Para la viga del Problema 28, determinar la flecha en el extremo derecho (en el punto de aplicación de la fuerza P).
Sol. $\dfrac{pL^4}{96EI} - \dfrac{5PL^3}{48EI}$

30. La viga de la figura adjunta está apoyada en un punto intermedio y cargada como se indica. Determinar las diversas reacciones.
Sol. $3P/10$ hacia abajo, en el extremo izquierdo
$PL/10$ en sentido contrario a las agujas del reloj en el extremo izquierdo
$13P/10$ hacia abajo, en el apoyo



31. Determinar, para la viga del Problema 30, la flecha en el punto de aplicación de la fuerza P.
Sol. $\dfrac{19PL^3}{1.500EI}$

32. Para la viga del Problema 30, tomar $L = 3$ m y $P = 10.000$ kg. Elegir un perfil de ala ancha que pueda soportar esta carga sin exceder de la tensión por flexión de 1.250 kg/cm². *Sol.* H 200

33. La viga de la Fig. (*c*) soporta una carga aislada y otra uniforme parcial. Determinar la reacción en su extremo derecho. *Sol.* $(\frac{81}{128}P + \frac{7}{128}pL)$

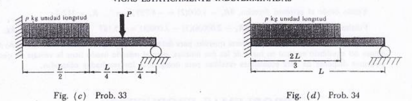
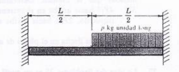


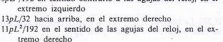
Fig. (c) Prob. 33

Fig. (d) Prob. 34

34. La viga de la Fig. (d) soporta una carga uniformemente repartida en los dos tercios de su longitud. Determinar la reacción en el extremo derecho. *Sol.* $10pL/81$



35. Una viga está empotrada en ambos extremos y soporta una carga uniforme en su mitad derecha, como se indica en el esquema adjunto. Determinar todas las reacciones.



Sol. $3pL/32$ hacia arriba, en el extremo izquierdo
$5pL^2/192$ en sentido contrario a las agujas del reloj, en el extremo izquierdo
$13pL/32$ hacia arriba, en el extremo derecho
$11pL^2/192$ en el sentido de las agujas del reloj, en el extremo derecho

36. Determinar la flecha en el centro de la viga descrita en el Problema 35. *Sol.* $pL^4/768EI$

37. Una viga empotrada en sus dos extremos soporta dos fuerzas aisladas situadas simétricamente, como se muestra en la Fig. (e) de abajo. Determinar las diversas reacciones.
Sol. Una fuerza hacia arriba igual a P, juntamente con un momento de sentido contrario a las agujas del reloj igual a $\dfrac{51}{400}PL$, en el extremo izquierdo. Reacciones simétricas en el derecho.

38. Determinar la flecha en el centro de la viga del Problema 37. *Sol.* $\dfrac{9PL^3}{4.000EI}$

$\frac{3}{20}L$ P $\frac{7}{10}L$ P $\frac{3}{20}L$ a P b

Fig. (e) Prob. 37

Fig. (f) Prob. 39

39. Una viga empotrada en los dos extremos está cargada con la fuerza aislada representada en la Fig. (f). Determinar las diversas reacciones.

Sol. $\dfrac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$ hacia arriba, en el extremo izquierdo, $\dfrac{Pab^2}{L^2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj, en el extremo izquierdo
$\dfrac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$ hacia arriba, en el extremo derecho, $\dfrac{Pa^2b}{L^2}$ en el sentido de las agujas del reloj, en el extremo derecho

40. Para la viga del Problema 39, $P = 5.000$ kg, $a = 1$ m y $b = 4$ m. Determinar las reacciones en los extremos.
Sol. Una fuerza hacia arriba de 4.480 kg y un momento en sentido contrario a las agujas del reloj de 3.200 kg-m en el extremo izquierdo. Una fuerza hacia arriba de 520 kg y un momento del sentido de las agujas del reloj de 800 kg-m en el extremo derecho.

41. Elegir un perfil de ala ancha apropiado para soportar la carga de la viga del Problema 40. La tensión por flexión admisible es de 1.400 kg/cm². *Sol.* H 160

42. La viga de la Fig. (g) está empotrada en el extremo izquierdo, apoyada en el derecho y sometida a un par M_0, como se indica. Determinar la reacción en el apoyo derecho. *Sol.* $\dfrac{3M_0a(a + 2b)}{2(a + b)^3}$

43. Determinar para la viga del Problema 42, la flecha en el punto de aplicación del momento M_0.
Sol. $\dfrac{M_0 a^2 b(a^2 - 2b^2)}{4(a + b)^3 EI}$

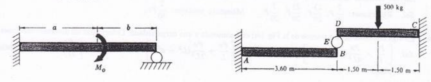


Fig. (*g*) Prob. 42

Fig. (*h*) Prob. 44

44. AB y CD son dos vigas en voladizo con un rodillo E entre sus extremos. Se aplica una carga de 500 kg como se indica en la Fig. (*h*). Ambas vigas son de acero, para el cual $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². Para la viga AB, $I = 2.000$ cm⁴ y para la CD, $I = 3.200$ cm⁴. Hallar la reacción en E. *Sol.* 41,5 kg

45. Una viga de dos tramos está apoyada en B y C y empotrada en A. Cada tramo soporta la carga uniformemente repartida indicada en la Fig. (*i*). Determinar las reacciones en B y C. *Sol.* $R_B = 1.130$ kg, $R_C = 485$ kg

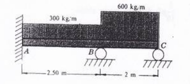


Fig. (*i*) Prob. 45

Fig. (*j*) Prob. 46

46. Una viga de 4 m soporta una carga uniforme sobre su mitad derecha y está sustentada en el centro del vano por un tirante vertical, como se muestra en la Fig. (*j*). El tirante es de acero, de 3 m de longitud, 3 cm² de sección y $E_a = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², mientras que la viga es de madera de 10 cm por 20 cm de sección y $E_m = 0{,}105 \times 10^6$ kg/cm². Determinar la tensión en el tirante vertical de acero. *Sol.* 244 kg/cm²

47. La viga continua de tres tramos de la Fig. (*k*) está sometida a la carga uniforme representada. Determinar las diversas reacciones y el máximo momento flector en la viga.
Sol. Reacciones: $\frac{4}{10}pL$, $\frac{11}{10}pL$, $\frac{11}{10}pL$, $\frac{4}{10}pL$. Momento máximo: $\frac{1}{10}pL^2$

48. La viga continua del Problema 47 es un perfil H 200 y $L = 3$ m. Determinar la carga máxima por unidad de longitud que puede soportar sin sobrepasar una tensión por flexión máxima de 1.250 kg/cm².
Sol. 8.250 kg/m

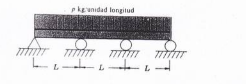


Fig. (*k*) Prob. 47

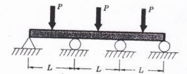


Fig. (*l*) Prob. 49

49. La viga continua de tres tramos de la Fig. (*l*) está sometida a las tres cargas centradas representadas. Determinar las distintas reacciones y el momento flector máximo en la viga.

Sol. Reacciones: $\frac{7}{20}P$, $\frac{23}{20}P$, $\frac{23}{20}P$, $\frac{7}{20}P$. Momento máximo: $\frac{7}{40}PL$.

50. La viga continua de dos tramos de la Fig. (*m*) está sometida a una carga aislada. Determinar las diversas reacciones.

Sol. $\left[\frac{Pb}{L} - \frac{Pa}{4L^3}(L^2 - a^2)\right]$ hacia arriba, $\left[\frac{Pa}{L} + \frac{Pa}{2L^3}(L^2 - a^2)\right]$ hacia arriba, $\left[\frac{Pa}{4L^3}(L^2 - a^2)\right]$ hacia abajo

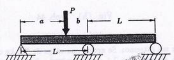


Fig. (*m*) Prob. 50

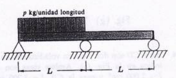


Fig. (*n*) Prob. 51

51. La viga continua de dos tramos de la Fig. (*n*) está sometida a la carga uniforme que se indica. Determinar las diversas reacciones. Hallar también, el momento flector máximo en la viga.

Sol. $\frac{7}{16}pL$ dirigida hacia arriba, $\frac{5}{8}pL$ hacia arriba, $\frac{1}{16}pL$ dirigida hacia abajo

Momento máximo $= \frac{49}{512}pL^2$

CAPITULO 12

Soportes o columnas

DEFINICION DE SOPORTE O COLUMNA. A una barra larga, delgada, sometida a compresión axial se le llama *soporte*, *columna* o *pilar*. Frecuentemente, se usan estos términos para designar a los elementos verticales, mientras que se suele llamar *codal* a las barras inclinadas.

TIPO DE FALLO DE UN SOPORTE. El fallo de un soporte se produce por pandeo, esto es, flexión lateral de la barra. Como comparación, hay que observar que el fallo de un elemento corto sometido a compresión se produce por fluencia del material. Puede producirse el pandeo y, por tanto, el fallo de un soporte, aun cuando la tensión máxima en la barra sea menor que el límite de fluencia del material.

EJEMPLOS DE SOPORTES. Muchos elementos de la estructura de las aeronaves, algunos miembros de las armaduras de cubiertas y de puentes, las bielas de las locomotoras y los apoyos verticales de suelos de edificios son ejemplos de soportes o columnas.

DEFINICION DE CARGA CRITICA PARA UN SOPORTE. La carga crítica de una barra larga, delgada, sometida a compresión axial, es el valor de la fuerza axial suficiente para que la barra adopte una forma ligeramente flexada. La figura adjunta representa una barra con los extremos articulados, pandeada a causa de la carga crítica P.

P P

RELACION DE ESBELTEZ DE UN SOPORTE. La relación entre la longitud de un soporte y el radio de giro de la sección se llama relación de esbeltez de la barra. Esta relación es, naturalmente, adimensional. En el Capítulo 7 se estudió el método para hallar el radio de giro de un área.

Si el soporte tiene libertad de giro en ambos extremos, el pandeo se produce respecto al eje para el cual es mínimo el radio de giro.

CARGA CRITICA DE UN SOPORTE LARGO ESBELTO. Si una barra larga, esbelta, de sección constante, está articulada en ambos extremos y sometida a compresión axial, la carga P_{cr} que producirá pandeo está dada por

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

donde E representa el módulo de elasticidad, I el momento mínimo de inercia de la sección respecto a un eje por el centro de gravedad y L la longitud de la barra. En el Problema 1 se da la deducción de esta fórmula.

La fórmula anterior fue deducida por primera vez por un matemático suizo, Leonhard Euler (1707-

1783), por lo cual se suele llamar a P_{cr} carga de pandeo de Euler. Como se verá en el Problema 2, esta expresión no es válida si la tensión axial correspondiente que se halla por la expresión $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$, donde A representa la sección de la barra, es superior al límite de proporcionalidad del material. Por ejemplo, para una barra de acero con un límite de proporcionalidad de 2.100 kg/cm², la fórmula anterior es válida solo para columnas cuya relación de esbeltez exceda de 100. El valor de P_{cr} obtenido por esta fórmula es una carga de rotura, por lo que para tener la carga de trabajo hay que introducir un coeficiente de seguridad. En los Problemas 7-11 se hallarán aplicaciones de esta expresión.

FORMULAS PARA EL DISEÑO DE SOPORTES CON RELACIONES DE ESBELTEZ INTERMEDIAS. El diseño de elementos comprimidos con valores elevados de la relación de esbeltez se lleva a cabo de acuerdo con la fórmula de Euler dada más arriba, con un coeficiente de seguridad apropiado. Para el diseño de elementos comprimidos más cortos se suele usar alguna de las muchas fórmulas empíricas que dan una relación entre la tensión crítica y la relación de esbeltez de la barra. En realidad, esas fórmulas dan, generalmente, una expresión de la tensión de trabajo en función de la esbeltez, esto es, ya contienen un coeficiente de seguridad. En este libro solo consideraremos dos de las muchas relaciones empíricas que existen.

La primera, llamada fórmula de la recta, tiene su origen en el Código de la Edificación de Chicago y establece que la tensión de trabajo admisible en una columna está dada (traducida a unidades métricas) por

$$\sigma_t = 1.120 - 4,9(L/r)$$

donde L/r representa la relación de esbeltez de la barra. Esta especificación establece que solo se puede usar esa relación en el intervalo $30 < L/r < 120$ para los llamados elementos principales, y hasta $L/r = 150$ para los secundarios, esto es, las barras usadas como arriostramiento lateral entre cerchas de cubierta, o las que se utilizan para reducir la esbeltez de una columna arriostrándola en un punto intermedio. En el Problema 13 se estudia en detalle. Para una aplicación, véase el Problema 15.

La segunda relación, que se halla en la especificación del Instituto Americano de la Construcción en Acero (A. I. S. C.) es la llamada fórmula parabólica y dice que la tensión admisible de una columna está dada por

$$\sigma_t = 1.190 - 0,034(L/r)^2$$

(reducida a unidades métricas) siempre que L/r sea menor que 120. Se estudiará en detalle en el Problema 14. Para aplicaciones, véanse los Problemas 16, 17, 18, 20, 21.

El efecto de esas dos expresiones es reducir la tensión de trabajo en una columna para valores crecientes de la esbeltez.

DISEÑO DE SOPORTES CARGADOS EXCENTRICAMENTE. Para el estudio racional y el diseño de un soporte cargado excéntricamente existen varios métodos, pero aquí solo presentaremos uno. Para una barra sometida a una fuerza de compresión P_0 que actúa en el centro de gravedad de la sección junto con otra fuerza P aplicada con una excentricidad e (medida desde el centro de gravedad), la tensión máxima es

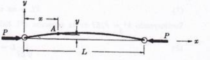
$$\sigma = \frac{P + P_0}{A} + \frac{Pev}{I}$$

donde A representa la sección de la barra e I el momento de inercia de dicha sección respecto al eje con relación al cual se produce la flexión. Como en el Capítulo 8, v expresa la distancia desde el eje neutro a las fibras extremas de la barra. Para obtener un valor seguro de la tensión de compresión admisible es necesario usar o la especificación A. I. S. C. o el Código de Chicago, con esta expresión. En el Problema 19 se discute el empleo de esta fórmula para columnas cargadas excéntricamente. Para aplicaciones, véanse los Problemas 20 y 21.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar la carga crítica para una barra delgada articulada en los extremos, cargada con una fuerza de compresión axial en cada extremo. La línea de acción de las fuerzas pasa por el centro de gravedad de la sección de la barra.

La carga crítica se define como la fuerza axial suficiente para mantener a la barra en una forma ligeramente deformada. Bajo la acción de la carga P, la barra tiene la forma flexada representada en la figura adjunta.



Para que se produzca la flexión lateral es necesario, indudablemente, que un extremo de la barra pueda moverse axialmente respecto al otro. La ecuación diferencial de la curva deformada es la misma que se vio en el Capítulo 9, o sea,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad (1)$$

Aquí, el momento flector en el punto A de coordenadas (x, y) no es más que el momento de la fuerza P aplicada en el extremo izquierdo de la barra, respecto a un eje por el punto A perpendicular al plano del papel. Hay que observar que esta fuerza produce una curvatura de la barra que presenta la concavidad hacia abajo, lo que, de acuerdo con el criterio de los signos del Capítulo 6, constituye una flexión negativa. Por tanto, el momento flector es $M = -Py$, y tenemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \qquad (2)$$

Si hacemos

$$\frac{P}{EI} = k^2 \qquad (3)$$

esta ecuación se transforma en

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \qquad (4)$$

que se resuelve fácilmente por uno de los varios métodos típicos que se estudian en los textos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la solución es casi evidente: solo hay que hallar una función que, derivada dos veces y sumada consigo misma (por una constante), sea igual a cero. Evidentemente, sen kx y cos kx poseen esta propiedad. Podemos tomar una combinación de ambas de la forma

$$y = C \operatorname{sen} kx + D \cos kx \qquad (5)$$

como solución de la ecuación *(4)*. Puede comprobarse fácilmente sustituyendo en *(4)* el valor de y dado por la ecuación *(5)*.

Una vez obtenido y en la forma dada en *(5)*, es necesario determinar C y D. En el extremo izquierdo de la barra, $y = 0$ cuando $x = 0$, y sustituyendo estos valores en *(5)*, obtenemos

$$0 = 0 + D \quad \text{y} \quad D = 0$$

En el extremo derecho de la barra, $y = 0$ cuando $x = L$, y sustituyendo estos valores en la ecuación *(5)*, tenemos

$$0 = C \operatorname{sen} kL$$

Evidentemente, $C = 0$ o sen $kL = 0$, pero si $C = 0$, y es nulo en todos los puntos y tenemos solamente el caso trivial de una barra recta, que es la configuración anterior a producirse el pandeo. Como esta solución no tiene interés para nosotros, tomaremos

(6) $$\operatorname{sen} kL = 0$$

Para que sea cierto, debemos tener

(7) $$kL = n\pi \text{ radianes } (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Sustituyendo $k^2 = P/EI$ en la ecuación (7), hallamos

(8) $$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi \quad \text{y} \quad P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

Indudablemente, el menor valor de esta carga P corresponde a $n = 1$. Entonces tenemos el primer modo del pandeo, en que la carga crítica está dada por

(9) $$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Es la llamada carga de pandeo de Euler para una columna con extremos articulados. La forma flexada correspondiente a esta carga es

(10) $$y = C \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de (9), obtenemos

(11) $$y = C \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

Por tanto, la deformada es una sinusoide. A causa de la aproximación adoptada en la deducción de la ecuación (1), no es posible obtener la amplitud del pandeo, representada por C en la ecuación (11).

Como puede verse en la ecuación (9), el pandeo de la barra se produce respecto el eje de la sección para el cual I adopta un valor mínimo.

2. Determinar la tensión axial en el soporte considerado en el Problema 1.

Para deducir la ecuación $EI(d^2y/dx^2) = M$, utilizada para determinar la carga crítica en el Problema 1, se supuso que hay una relación lineal entre deformación y tensión (véase el Problema 1, Capítulo 9). Por tanto, la carga crítica expresada por la ecuación (9) del Problema 1 es correcta solamente si no se excede el límite de proporcionalidad del material.

La tensión axial en la barra inmediatamente antes de que adopte su forma pandeada está dada por

(1) $$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

donde A representa la sección de la barra. Sustituyendo en lugar de P_{cr} el valor dado en (9) del Problema 1, se tiene

(2) $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

Pero, por el Capítulo 7, sabemos que podemos escribir

(3) $$I = Ar^2$$

donde r representa el llamado radio de giro de la sección. Sustituyendo este valor en la ecuación (2), hallamos

(4) $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2} = \pi^2 E\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

(5) $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

A la relación L/r se le llama *relación de esbeltez* de la columna.

Consideremos una columna de acero con un límite de proporcionalidad de 2.100 kg/cm² y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². La tensión de 2.100 kg/cm² marca el límite superior para el que puede usarse la ecuación (5). Para hallar el valor de L/r correspondiente a esas constantes, sustituiremos en la ecuación (5), obteniendo

$$2.100 = \frac{\pi^2(2{,}1 \cdot 10^6)}{(L/r)^2} \quad \text{y} \quad L/r \approx 100$$

Por tanto, para este material la carga de pandeo dada por la ecuación (9) del Problema 1 y la tensión axial dada por la ecuación (5) son válidas solo para las columnas con $L/r \geq 100$. Para las que $L/r < 100$, la tensión de compresión excede del límite de proporcionalidad antes de que se produzca el pandeo elástico, y las ecuaciones anteriores no son válidas.

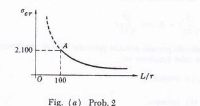


Fig. (*a*) Prob. 2

Fig. (*b*) Prob. 3

La ecuación (5) se puede representar como en la Fig. (*a*). Para los valores particulares del límite de proporcionalidad y del módulo de elasticidad que se han supuesto antes, la parte de curva a la izquierda de $L/r = 100$ no es válida, por lo que, para este material, el punto A representa el límite superior de aplicación de la curva.

3. Determinar la carga crítica para una barra larga, delgada, empotrada en los dos extremos y cargada con una fuerza axial de compresión en cada extremo.

La carga crítica es la fuerza axial de compresión P, suficiente para mantener a la barra en una posición ligeramente deformada, como se muestra en la Fig. (*b*). Los momentos M_0 en los extremos representan la acción de los apoyos en la barra; estos momentos impiden cualquier giro de ella en sus extremos.

La observación de la curva deformada de la pieza pandeada dada más arriba permite ver que la parte central de la barra entre los puntos A y B corresponde a la elástica de la barra con extremos articulados que se vio en el Problema 1. Para el caso de extremos empotrados, la longitud $L/2$ corresponde a la longitud total L de la barra articulada, por lo que la carga crítica para una barra con los extremos empotrados se puede hallar por la ecuación (9) del Problema 1, sustituyendo L por $L/2$, lo que da

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

También se ha supuesto ahora que la tensión máxima en la barra no excede del límite de proporcionalidad del material.

La fórmula anterior, deducida aquí de modo intuitivo, se podría deducir de forma más rigurosa, como solución de la ecuación diferencial ordinaria de la barra flexada, como se hace en el Problema 4 en detalle.

4. Determinar la carga crítica para la barra larga delgada del Problema 3 como solución directa de la ecuación diferencial.

Introduzcamos el sistema de coordenadas x-y representado, y sean (x, y) las coordenadas de un punto arbitrario de la barra. El momento flector en este punto es la suma de los momentos de las fuerzas a la izquierda de

esa sección respecto a un eje por dicho punto perpendicular al plano del papel. Por tanto, en ese punto tenemos

$$M = -Py + M_0$$

Utilizando la ecuación diferencial ordinaria de la deformada,

(1) $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py + M_0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{M_0}{EI}$$

Como se estudia en los textos de ecuaciones diferenciales, la solución de esta ecuación consta de dos partes: la primera no es más que la solución de la llamada ecuacion homogénea obtenida haciendo el segundo miembro de la ecuación (1) igual a cero. Por tanto, hay que resolver la ecuación

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

Pero en el Problema 1 se vio ya que la solución de esta ecuación es

(3) $$y = A_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

La segunda parte de la solución de (1) está constituida por una solución particular, esto es, una función cualquiera que satisfaga a (1). Evidentemente, una de tales funciones es

$$y = c_1 \quad (= \text{constante})$$

Sustituyendo esta supuesta solución particular en (1), hallamos

$$0 + \frac{P}{EI}c_1 = \frac{M_0}{EI} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{M_0}{P}$$

Así, pues, una solución particular es

(4) $$y = M_0/P.$$

La solución general de la ecuación (1) está formada por la suma de las soluciones dadas por (3) y (4), o sea,

(5) $$y = A_1 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + \frac{M_0}{P}$$

Por consiguiente,

(6) $$\frac{dy}{dx} = -A_1\sqrt{\frac{P}{EI}} \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

En el extremo izquierdo de la barra, $y = 0$ cuando $x = 0$, y sustituyendo estos valores en la ecuación (5), hallamos $0 = A_1 + M_0/P$. Para el extremo izquierdo, también $dy/dx = 0$ cuando $x = 0$, y sustituyendo en (6), obtenemos $0 = 0 + B_1\sqrt{P/EI}$ y $B_1 = 0$.

En el extremo derecho de la barra $dy/dx = 0$ cuando $x = L$, y sustituyendo en (6) con $B_1 = 0$, se halla

$$0 = -A_1\sqrt{\frac{P}{EI}} \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}L$$

Pero $A_1 = -M_0/P$, y, como esta relación no es cero, será sen $\sqrt{P/EI}\,L = 0$, lo que sucede solo cuando $\sqrt{P/EI}\,L = n\pi$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por consiguiente,

(7) $$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

Para el llamado primer modo de pandeo estudiado en el Problema 3, la elástica de la viga tiene una tangente horizontal en $x = L/2$, esto es, $dy/dx = 0$ allí. La ecuación (6) puede escribirse ahora en la forma

(6')
$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{P} \cdot \frac{n\pi}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Y como $dy/dx = 0$ en $x = L/2$, hallamos

$$0 = \frac{M_0}{P} \cdot \frac{n\pi}{L} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

La única forma en que se satisface esta ecuación es cuando n toma valores pares, esto es, $n = 2, 4, 6, \ldots$

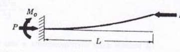
Así, para el menor valor posible de $n = 2$, la ecuación (7) se transforma en

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Esta es la carga crítica para una barra con extremos empotrados sometida a compresión axial. Queda, pues, confirmado el resultado obtenido por el método menos riguroso del Problema 3.

5. Determinar la carga crítica para una barra larga delgada, empotrada en un extremo, libre en el otro y cargada con una fuerza de compresión axial aplicada en el extremo libre.

La carga crítica es la fuerza de compresión axial P necesaria para mantener a la barra en una forma ligeramente deformada, como se ve en la figura adjunta. El momento M_0 representa el efecto de la sustentación al evitar cualquier giro del extremo izquierdo de la barra.



Observando la elástica de la pieza pandeada, se ve que toda la barra corresponde a la mitad de la barra flectada, con extremos articulados, del Problema 1, por lo que para la que estamos considerando, la longitud L corresponde a $L/2$ de la articulada. Por tanto, la carga crítica para la barra actual se puede hallar por la ecuación (9) del Problema 1, sustituyendo L por $2L$, lo que da

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

6. Determinar la relación de esbeltez de un soporte de madera de 20 × 25 cm de sección y 7,5 m de longitud.

Como se dijo en el Problema 1, el pandeo de esta barra se producirá respecto al eje de la sección para el cual es mínimo el momento de inercia. Este momento de inercia para un área rectangular respecto a un eje por su centro de gravedad es

$$I = bh^3/12 = 25(20^3)/12 = 16.666 \text{ cm}^4$$

El área de la sección es de 500 cm², por lo que el radio de giro mínimo vale

$$r = \sqrt{I/A} = \sqrt{16.666/500} = 5{,}77 \text{ cm}$$

La relación de esbeltez es, pues, $\frac{L}{r} = \frac{750}{5{,}77} = 130.$

7. Una barra de acero de sección rectangular de 4 cm por 5 cm, articulada en sus extremos, está sometida a compresión axial. Si el límite de proporcionalidad del material es 2.300 kg/cm², y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², determinar la longitud mínima para la cual se puede usar la fórmula de Euler para determinar la carga de pandeo.

El momento de inercia mínimo es $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(5)(4)^3 = 26{,}66 \text{ cm}^4$.

El radio de giro mínimo será $r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{26{,}66}{(4)(5)}} = 1.155$ cm.

En el Problema 2 se halló que la tensión axial para tal barra cargada axialmente es

$$s_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

La longitud mínima para la cual se puede aplicar la fórmula de Euler se halla haciendo la tensión crítica en la expresión anterior igual a 2.300 kg/cm², obteniéndose

$$2.300 = \frac{\pi^2(2,1 \times 10^6)}{(L/1,155)^2} \quad \text{y} \quad L = 110 \text{ cm}$$

8. Considerar nuevamente una barra de acero de 4 cm por 5 cm de sección, articulada en sus extremos y sometida a compresión axial. Tiene 175 cm de longitud y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm². Determinar, utilizando la fórmula de Euler, la carga de pandeo.

En el Problema 7 se halló que el momento de inercia mínimo de esta sección es de 26,66 cm⁴. Aplicando la expresión de la carga de pandeo dada por la ecuación *(9)* del Problema 1, hallamos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(2,1 \times 10^6)(26,66)}{(175)^2} = 18.000 \text{ kg}$$

La tensión axial correspondiente a esta carga es $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{18.000}{(4)(5)} = 900$ kg/cm².

9. Comparar las resistencias al pandeo de dos barras largas y delgadas, articuladas en sus extremos, una de sección circular maciza de 5 cm de diámetro y la otra de sección cuadrada maciza, con la misma área de la sección ambas. Las columnas tienen igual longitud y están hechas del mismo material. Utilizar la teoría de Euler.

Para la barra de sección circular, $I = \pi D^4/64 = \pi(5)^4/64 = 30,7$ cm⁴, por lo que la carga de pandeo es $P_{cr} = \pi^2 E(30,7)/L^2$.

El área de la barra circular es $\pi(2,5)^2 = 19,6$ cm², por lo que la cuadrada tiene $\sqrt{19,6} = 4,43$ cm de lado. El momento de inercia de esta barra respecto a un eje por el centro de gravedad de la sección es $I = bh^3/12 = 4,43(4,43)^3/12 = 32$ cm⁴. Por tanto, la carga de pandeo es $P'_{cr} = \pi^2 E(32)/L^2$.

Ahora podemos hallar la relación $P_{cr}/P'_{cr} = 30,7/32 = 0,958$. Por tanto, la carga de pandeo de la barra circular es el 95,8 % de la de la barra cuadrada.

10. Considerar una barra delgada y larga de sección circular de 5 cm de diámetro empotrada en cada extremo. El material es acero, para el cual $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm². Determinar la longitud mínima para la que puede usarse la ecuación de Euler en la determinación de la carga de pandeo si el límite de proporcionalidad del material es 2.450 kg/cm².

Según el Problema 3, la carga de pandeo es $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$.

La tensión axial antes del pandeo está dada por $\sigma_{cr} = P_{cr}/A = 4\pi^2 EI/AL^2$, pero $I = Ar^2$, siendo r el radio de giro mínimo de la sección. (Realmente, todos los radios de giro son iguales, por simetría.) Sustituyendo

$$(1) \qquad \sigma_{cr} = \frac{4\pi^2 E(Ar^2)}{AL^2} = \frac{4\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

Según el Problema 9, el momento de inercia de la sección circular respecto a un eje diametral es de 30,7 cm⁴, por lo que el radio de giro vale $r = \sqrt{I/A} = \sqrt{30,7/\pi(2,5)^2} = 1,25$ cm.

La longitud mínima para la que se puede aplicar la fórmula de Euler se halla haciendo igual a 2.450 kg/cm² la tensión crítica en la ecuación *(1)*. Será

$$2.450 = \frac{4\pi^2(2,1 \times 10^6)}{(L/1,25)^2} \quad \text{y} \quad L = 230 \text{ cm}$$

11. Determinar la carga crítica para un perfil H 120 que actúa como una columna de extremos articulados. La barra tiene 3,50 m de longitud y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm². Utilizar la teoría de Euler.

En la tabla del final del Capítulo 8 hallamos que el momento de inercia mínimo es de 317 cm⁴. Este es el valor que debe usarse en la expresión de la carga de pandeo, por lo que

$$P_{cr} = \pi^2 EI/L^2 = \pi^2(2,1 \cdot 10^6)(317)/(350)^2 = 53.600 \text{ kg}$$

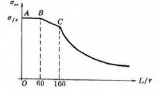
12. En el Problema 2 se halló que el límite de aplicabilidad de la fórmula de Euler para hallar la carga de pandeo de un soporte corresponde al límite de proporcionalidad del material. Discutir el diseño de elementos comprimidos con relaciones de esbeltez menores que el valor correspondiente a dicho límite de proporcionalidad.

En el Problema 2 se halló que la carga axial en la barra articulada inmediatamente antes de producirse el pandeo es

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

donde L/r representa la relación de esbeltez del soporte. Para un soporte de acero con un límite de proporcionalidad de 2.100 kg/cm² y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm² la expresión anterior de la tensión y, por consiguiente, la correspondiente de la carga de pandeo, solo son válidas, según se vio, para valores de L/r mayores de 100. Por tanto, queda establecido el procedimiento para diseñar soportes con L/r mayor que 100.

Para los soportes con relación de esbeltez menor que 100 (o el valor correspondiente para límite de proporcionalidad y módulo distintos de los usados antes) se pueden usar varios métodos. El primero de ellos amplía la fórmula de Euler para soportes más cortos, en los que la tensión crítica está por encima del límite de proporcionalidad del material, empleando el llamado módulo reducido E' en lugar del valor constante del módulo de elasticidad. Este módulo reducido no es constante, sino que varía con la relación de esbeltez del soporte. Con este procedimiento se aumenta el límite superior de aplicabilidad de la expresión anterior de la tensión axial, aproximadamente hasta el límite de fluencia del material. Si este límite es de 2.800 kg/cm², el valor mínimo de la relación de esbeltez para el cual es válida esa expresión es, aproximadamente, 60. Este concepto de módulo reducido puede representarse aproximadamente por la recta BC del esquema adjunto.



Para valores de la relación de esbeltez menores de 60 se puede considerar que la tensión crítica es igual al límite de fluencia del material. Esto está representado por la recta AB del esquema de arriba. Así, en este esquema, la línea quebrada ABC, juntamente con la curva de Euler, determinar la tensión crítica para todos los valores de la relación de esbeltez. Hay que observar que en los valores anteriores no se ha introducido ningún coeficiente de seguridad. A veces se dice que los soportes que tienen valores de la relación de esbeltez correspondientes a BC son de «longitud intermedia».

Para hallar tensiones de trabajo hay que dividir las ordenadas del diagrama anterior por un determinado número que representa el coeficiente de seguridad. La experiencia demuestra que la excentricidad de la carga y las imperfecciones iniciales que existen siempre en el soporte tienden a aumentar con los valores crecientes de L/r, por lo que se suele emplear un coeficiente de seguridad que varía desde 2,0 para las barras muy cortas hasta 3,5 para las muy largas y esbeltas. En los Problemas 13 y 14 se dan fórmulas para las tensiones de trabajo en los soportes.

Para el diseño, se suelen representar las relaciones anteriores entre σ_{cr} y L/r mediante fórmulas empíricas. En los dos problemas siguientes se presentarán algunas de ellas.

13. Discutir las diversas fórmulas relativas al diseño de columnas, basadas en relaciones lineales entre la tensión de trabajo y la relación de esbeltez.

Estas relaciones lineales, o rectilíneas, suponen que la tensión crítica, cuando excede del límite de proporcionalidad del material, se puede expresar por una ecuación de la forma

$$\sigma_{cr} = a - b(L/r)$$

donde a y b son constantes que dependen de las propiedades físicas del material. Esta expresión puede dar la tensión crítica o ajustarse los valores de a y b de forma que en la fórmula se incluya un coeficiente de seguridad.

En general, sucede esto último. Una de las fórmulas lineales usadas más generalmente es la del Código de la Edificación de Chicago. Esta expresión da la tensión de trabajo segura σ_t en la forma siguiente:

$$\sigma_t = 1.120 - 4{,}9(L/r)$$

Sirve para $30 < L/r < 120$ para elementos principales y $30 < L/r < 150$ en los llamados secundarios, como arriostramientos laterales de cuchillos de puentes y cubiertas. El mismo código de la edificación determina una tensión de trabajo de 980 kg/cm² para barras con relación de esbeltez menor de 30.

Es evidente que el objeto de la fórmula de la tensión de trabajo anterior es reducir la tensión de compresión crítica (basada en soportes muy cortos) para valores crecientes de la relación de esbeltez.

14 Discutir las diversas fórmulas relativas al diseño de soportes basadas en relaciones parabólicas entre la tensión de trabajo y la relación de esbeltez.

Estas relaciones parabólicas suponen que la tensión crítica, cuando excede del límite de proporcionalidad del material, se puede representar por una ecuación de la forma

$$\sigma_{cr} = a - b(L/r)^2$$

donde a y b expresan, también, constantes que dependen de las propiedades físicas del material. Generalmente, se eligen a y b para que la parábola representada por la ecuación anterior sea tangente a la fórmula de Euler y la tensión crítica sea igual al límite de fluencia del material para las barras muy cortas. También, como en el Problema 13, esa expresión puede dar las tensiones críticas o se pueden ajustar a y b para que exprese un valor seguro de la tensión de trabajo.

Un ejemplo de este último caso lo constituye una fórmula sugerida por el Instituto Americano de la Construcción en Acero (A. I. S. C.) en la que la tensión de trabajo está dada por

$$\sigma_t = 1.190 - 0{,}034(L/r)^2$$

(traducida a unidades métricas) para el diseño de elementos principales con L/r menor de 120. Para los secundarios que tienen $120 < L/r < 200$, esta misma especificación da la fórmula siguiente:

$$\sigma_t = \frac{1.260}{1 + [\frac{1}{1.260}(\frac{L}{r})^2]}$$

(en unidades métricas). Estas expresiones, como las del Problema 13, suponen que la barra está articulada. Se pueden usar para otras condiciones en los extremos, utilizando los conceptos de longitud modificada mencionados en los Problemas 3 y 5.

15. Una barra de sección circular de 5 cm de diámetro y 1,40 m de longitud está sometida a fuerzas axiales de compresión y articulada en ambos extremos. Determinar la carga máxima que puede soportar con seguridad utilizando la fórmula del Código de la Edificación de Chicago.

El momento de inercia es $I = \pi(5)^4/64 = 30{,}7$ cm⁴.

El radio de giro es $r = \sqrt{I/A} = \sqrt{30{,}7/\pi(2{,}5)^2} = 1{,}25$ cm.

La relación de esbeltez es $L/r = 140/1{,}25 = 112$.

La tensión de trabajo es $\sigma_t = 1.120 - 4{,}9L/r = 1.120 - 4{,}9(112) = 571$ kg/cm².

Luego, $P = A \cdot \sigma = \pi(2{,}5)^2(571) = 11.200$ kg.

16. Determinar la carga máxima que puede soportar con seguridad el soporte del Problema 15 utilizando la fórmula de la A. I. S. C. De acuerdo con esta fórmula, la tensión de trabajo está dada por $\sigma_t = 1.190 - 0{,}034(L/r)^2 = 1.190 - 0{,}034(112)^2 = 764$ kg/cm² por lo que $P = A \cdot \sigma_t = \pi(2{,}5^2)(764) = 15.000$ kg.

La diferencia entre los resultados obtenidos por las fórmulas lineal y parabólica refleja la diferencia de coeficiente de seguridad considerado en el Código de la Edificación de Chicago y en la especificación A. I. S. C.

17. ¿Cuál es la carga de compresión axial máxima que puede soportar con seguridad un perfil H 200 si la barra mide 5,50 m y está articulada en ambos extremos? Utilizar la fórmula de la A. I. S. C.

En la tabla del final del Capítulo 8 hallamos que el momento de inercia mínimo de este perfil es de 2.140 cm^4, y la sección de 82,7 cm^2. El valor mínimo de r será $r = \sqrt{I/A} = \sqrt{2.140/82,7} = 5,08$ cm.

La relación de esbeltez es $L/r = 550/5,08 = 108$.

La tensión de trabajo $\sigma_t = 1.190 - 0,034(L/r)^2 = 793$ kg/cm².

Por lo que, $P = A \cdot \sigma_t = 82,7(793) = 65.600$ kg.

18. Elegir un perfil de ala ancha capaz de soportar una carga de compresión axial de 45.000 kg. La barra mide 3,50 m. Utilizar las especificaciones A. I. S. C. Existen articulaciones en los dos extremos.

La tensión de trabajo está dada por

$$(1) \qquad \sigma_t = 1.190 - 0,034(L/r)^2$$

Sustituyendo los valores de P y L dados, en esta expresión, tenemos

$$(2) \qquad 45.000/A = 1.190 - 0,034(350/r)^2$$

La solución de esta ecuación puede obtenerse por tanteos. Como primera aproximación, hallaremos el área mínima haciendo la tensión axial igual a 1.190 kg/cm², aunque sea, indudablemente, mayor que la tensión de trabajo admisible. Así hallamos

$$45.000/A = 1.190 \quad \text{y} \quad A = 37,8 \text{ cm}^2$$

por lo que no hay que considerar ningún perfil con área menor de 37,8 cm².

Ensayaremos primero un perfil H 140. Según la tabla del final del Capítulo 8, el momento de inercia mínimo es de 550 cm^4 y la sección de 44,1 cm². Por consiguiente, el radio de giro mínimo es $r = \sqrt{550/44.1} = 3,53$ cm. La relación de esbeltez será $L/r = 350/3,53 = 100$. Por la ecuación (*1*), la tensión de trabajo admisible en esta barra es

$$\sigma_t = 1.190 - 0,034(100)^2 = 850 \text{ kg/cm}^2$$

Y la máxima carga que soporta con seguridad

$$P = A \cdot \sigma_t = 44,1(850) = 37.480 \text{ kg}$$

Como esta carga es menor que la de diseño, el perfil es demasiado ligero.

Ensayemos ahora un perfil H 160. De acuerdo con la tabla del Capítulo 8, este perfil tiene un momento de inercia mínimo de 958 cm^4 y una sección de 58,0 cm². El radio de giro mínimo es $r = \sqrt{958/58,4} = 4,05$ cm y la relación de esbeltez $L/r = 350/4,05 = 86$. La tensión de trabajo admisible vale

$$\sigma_t = 1.190 - 0,034(86)^2 = 940 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la carga máxima que puede soportar con seguridad es

$$P = A \cdot \sigma_t = 58,4(940) = 54.900 \text{ kg}$$

Como este valor excede de la carga de diseño, el perfil H 160 es el apropiado.

19. Todas las expresiones de las cargas admisibles en soportes dadas hasta aquí en este capítulo suponen que la carga se aplica en el centro de gravedad de la sección de la barra. Dar un método para estudiar y diseñar soportes en el caso en que la carga esté aplicada excéntricamente.

Frecuentemente, los soportes están cargados de modo que la recta de acción de las cargas axiales está a una distancia e del centro de gravedad de la sección de la barra, como se muestra en la figura adjunta.



Uno de los métodos más sencillos y más conservadores para estudiar este caso consiste en despreciar el efecto de las deformaciones laterales del soporte, en el brazo del momento de la carga axial. La tensión máxima se produce en las fibras más alejadas del eje neutro de la sección. En ellas, la tensión es igual a la suma de la tensión normal debida a la carga axial y la de flexión producida por la excentricidad de la carga. Para un soporte con una carga axial P_0 y otra carga P aplicada con la excentricidad e, la tensión máxima es

$$\sigma = \frac{P + P_0}{A} + \frac{Pev}{I}$$

donde A representa el área de la sección de la barra, I el momento de inercia y v la distancia desde el eje neutro a las fibras extremas.

La tensión real calculada por esta ecuación no excederá de la de diseño, que se determina a base de una de las fórmulas para los soportes cargados axialmente presentadas antes en este capítulo. Para calcular la tensión de diseño por alguna de estas fórmulas (como las de la especificación A. I. S. C.) debe usarse el radio de giro mínimo respecto al eje con relación al cual se produce la flexión.

20 Un perfil H 200 de 3,50 m de longitud está sometido a una fuerza de compresión axial de 2.000 kg aplicada en el centro de gravedad de la sección. ¿Qué otra fuerza de compresión se puede aplicar simultáneamente, con una excentricidad de 1,50 m? Utilizar las especificaciones A. I. S. C.

La tensión de trabajo está dada por $\sigma_t = 1.190 - 0{,}034(L/r)^2$, por lo que, según el Problema 19, se obtiene inmediatamente la ecuación siguiente que permite determinar la carga excéntrica P:

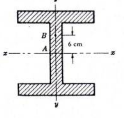
$$(1) \qquad 1.190 - 0{,}034\left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{P + P_0}{A} + \frac{Pev}{I}$$

El radio de giro mínimo para un perfil H 200, según se vio en el Problema 17, es 5,08 cm. Además, según la tabla del final del Capítulo 8, $A = 82{,}7$ cm^2, $I = 2.140$ cm^4 y $v = 10$ cm. Sustituyendo estos valores junto con $P_0 = 2.000$ kg en la ecuación (1), tenemos,

$$1.190 - 0{,}034\left(\frac{350}{5{,}08}\right)^2 = \frac{P + 2.000}{82{,}7} + \frac{P(150)(10)}{2.140} \qquad \text{y} \qquad P = 1.409 \text{ kg}$$

Hay que observar que L/r es 69, que cae dentro del margen de aplicación de la fórmula A. I. S. C.

21. Elegir un perfil H apropiado para soportar una carga concéntrica axial de compresión de 20.000 kg junto con otra excéntrica de 15.000 kg aplicada a 6 cm del centro de la sección en el punto B del esquema adjunto. Utilizar las especificaciones A. I. S. C. La barra tiene 4,8 m de longitud y los extremos están articulados.



Utilizando la fórmula de la A. I. S. C. con la ecuación del Problema 19, tenemos

$$(1) \qquad 1.190 - 0{,}034\left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{P + P_0}{A} + \frac{Pev}{I}$$

Obsérvese que debe usarse el radio de giro mínimo para determinar la relación de esbeltez L/r respecto al eje con relación al cual se produce la

flexión. La ecuación (*1*) se resuelve por tanteos. Aunque la tensión admisible es, evidentemente, menor de 1.190 kg/cm², podemos usar este valor para determinar el área mínima de la columna. La fuerza total de compresión es de 35.000 kg, que requieren un área mínima de 35.000/1.190 = 29,4 cm². Por tanto, debemos ensayar perfiles con áreas superiores a este valor.

Como tanteo inicial, consideremos el perfil H 120. Según la tabla del final del Capítulo 8, el momento de inercia mínimo es 317 cm⁴ y el área 34,3 cm². La relación de esbeltez es, pues, $480/\sqrt{317/34{,}3} = 158$, que es superior al valor admisible 120, para el que es válida la fórmula de la A. I. S. C.

Ensayemos, ahora, el perfil H 160. La relación de esbeltez es $480/\sqrt{958/58{,}4} = 118$. Según la tabla del Capítulo 8, el momento de inercia respecto al eje de flexión (el x-x) es de 2.630 cm⁴. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*1*) tenemos

$$1.190 - 0{,}034(118)^2 = \frac{15.000 + 20.000}{58{,}4} + \frac{15.000(6)(8)}{2.630}$$

Y simplificando,

$$717 \neq 873$$

Esta relación indica que la tensión admisible es de 717 kg/cm² mientras que la real en la columna es de 873 kg/cm², por lo que se necesita un perfil mayor.

Comprobemos un perfil H 180. La relación de esbeltez es $480/\sqrt{1.360/65{,}8} = 105$ y el momento de inercia respecto al eje de flexión 3.830 cm⁴. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*1*), hallamos

$$1.190 - 0{,}034(105)^2 = \frac{15.000 + 20.000}{65{,}8} + \frac{15.000(6)(9)}{3.830}$$

Y simplificando,

$$815 \neq 743$$

La tensión admisible en esta columna es, pues, de 815 kg/cm², mientras que la real es de 743 kg/cm², por lo que la elección es satisfactoria.

PROBLEMAS PROPUESTOS

22. Una barra de acero maciza de sección circular de 5 cm de diámetro está articulada en sus extremos y sometida a compresión axial. Si el límite de proporcionalidad del material es de 2.500 kg/cm² y $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², determinar la longitud mínima para la que es válida la fórmula de Euler. Hallar, también, el valor de la carga de pandeo de Euler si la columna tiene esta longitud mínima. *Sol.* 114 cm, 48.900 kg

23. Si la longitud de la columna del Problema 22 se aumenta a 240 cm, determinar la carga de pandeo de Euler. *Sol.* 11.000 kg

24. Determinar la relación de esbeltez de un soporte de acero de sección circular maciza con 10 cm de diámetro y 2,70 m de longitud. *Sol.* 108

25. De acuerdo con las normas A. I. S. C., ¿cuál es la capacidad de carga del soporte del Problema 24? La barra está articulada en sus extremos. *Sol.* 62.300 kg

26. Utilizando las normas del Código de la Edificación de Chicago, determinar la capacidad de carga del soporte del Problema 24. *Sol.* 46.400 kg

27. Utilizando la teoría de Euler, determinar la carga crítica de un soporte H 140 de 4 m de longitud. La barra está articulada en sus extremos. Suponer $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm². *Sol.* 71.200 kg

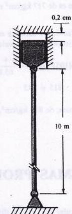
28. Determinar la carga de compresión axial máxima que puede soportar con seguridad un soporte H 140 de extremos articulados, de 3,40 m de longitud. Utilizar las normas A. I. S. C. *Sol.* 38.600 kg

29. Elegir un perfil H capaz de soportar una carga de compresión axial de 55.000 kg. La barra está articulada en sus extremos y tiene 4,20 m de longitud. Utilizar las normas A. I. S. C. *Sol.* H 180

30. Un soporte está hecho con un tubo soldado de acero de 3 m de largo. El diámetro exterior del tubo es de 70 mm y el interior de 65 mm. El área es de 5,30 cm^2, y el momento de inercia respecto a un eje diametral de 30,23 cm^4. Se aplica al tubo una fuerza de compresión con una excentricidad de 1 cm. Determinar el valor máximo de esa carga excéntrica que se puede aplicar. Utilizar la norma A. I. S. C. *Sol.* 2.150 kg

31. Elegir un perfil H apropiado para soportar una carga concéntrica de 30.000 kg, junto con otra excéntrica de 20.000 kg, aplicada a 5 cm del centro de la sección, en un punto del eje de simetría que biseca la anchura del alma de la viga. La barra tiene 5,40 m de longitud y los extremos articulados. Utilizar la norma A. I. S. C. *Sol.* H 200

32. La columna representada más abajo está articulada en ambos extremos y es libre de dilatar en la abertura del extremo superior. La barra es de acero, de 2 cm de diámetro y ocupa la posición representada a 15° C. Determinar la temperatura máxima a la que se puede calentar la barra sin que pandee. Tomar $\alpha = 10 \times 10^{-6}/°C$ y $E = 2,1 \times 10^6$ kg/cm². Despreciar el peso de la columna. *Sol.* 35,25° C



CAPITULO 13

Uniones remachadas o roblonadas

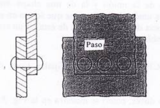
INTRODUCCION. Los elementos de las estructuras se unen entre sí generalmente por remaches o soldaduras. En las aeronaves, depósitos de presión, calderas de vapor, tanques, tuberías forzadas, vigas de chapa, cerchas y estructuras de barcos, se encuentran aplicaciones de uniones remachadas.

TIPOS DE UNIONES REMACHADAS. En la práctica se encuentran dos tipos comunes de nudos remachados para uniones de chapas. Se conocen por unión por solapo o solape y unión a tope.

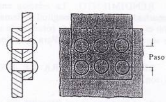
UNIONES POR SOLAPO. Las dos chapas solapan una sobre otra, y se unen con una o más filas de remaches. Para aplicaciones, véanse los Problemas 2-6.

UNIONES A TOPE. Las dos chapas están a tope y van unidas con dos cubrejuntas, unidas cada chapa principal y los cubrejuntas con una o más filas de remaches. Para aplicaciones, véanse los Problemas 7-9.

TIPOS DE UNION POR SOLAPO. En la Fig. 1 se muestran tipos usuales de uniones por solapo. Se designan por uniones por solapo de una fila de remaches y de dos filas, respectivamente.



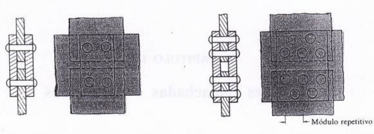
UNION POR SOLAPO DE UNA FILA DE REMACHES



UNION POR SOLAPO DE DOBLE FILA DE REMACHES

Fig. 1

TIPOS DE UNIONES A TOPE. En la Fig. 2 se muestran tipos de uniones a tope. Se designan por uniones a tope de una fila de remaches y de dos filas, respectivamente. En las uniones a tope, particularmente en las empleadas en calderas, las platabandas son, a veces, de distintas anchuras. La más corta se coloca siempre en el lado exterior de la caldera o depósito de presión, para permitir el retacado de la junta y asegurar así la mayor impermeabilidad.



UNION A TOPE DE UNA FILA DE REMACHES

UNION A TOPE DE DOBLE FILA DE REMACHES

Fig. 2

PASO. La distancia de centro a centro de los remaches de una misma fila se llama *paso de remachado*, o simplemente *paso*. En la Fig. 1 se da un ejemplo para uniones de solapo de una fila de remaches. El paso puede variar, indudablemente, de una a otra fila de remaches de una unión. El paso mayor se llama *paso máximo* (a veces largo) y el menor *paso mínimo* (o corto).

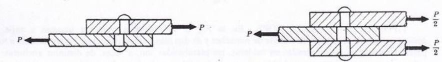
PASO ENTRE FILAS. La distancia entre los ejes de dos filas de remaches es el paso entre filas, del que puede verse un ejemplo en la Fig. 1, para una unión de solapo de doble fila de remaches. Este paso varía entre $2\frac{1}{2}$ y $3\frac{1}{2}$ veces el diámetro de los remaches.

MODULO REPETITIVO. Un *módulo repetitivo* consiste en un grupo de remaches cuyo conjunto se repite a lo largo de la unión. Un ejemplo típico es el que se muestra en la Fig. 2 para la unión a tope de doble fila de remaches. Generalmente conviene basar los cálculos en la resistencia de uno de estos grupos en lugar de considerar toda la longitud de la unión. Para otros ejemplos, véanse los Problemas 2 a 9 inclusive. Frecuentemente, se le designa simplemente *módulo*.

RENDIMIENTO. La relación entre la resistencia de la unión y la de una chapa maciza no remachada de la misma longitud se llama *rendimiento* de la unión. La resistencia que se usa en esta relación es, generalmente, la de rotura de la unión. La resistencia de trabajo difiere de ésta en un coeficiente de seguridad de 5 o más. Para ejemplos, véanse los Problemas 4, 5, 8, 9.

MODOS DE ROTURA DE UNIONES REMACHADAS. Los principales tipos de rotura son:

a) *Cortadura* de los remaches por cortante simple o doble, como se muestra en la Fig. 3. La tendencia es al corte por el remache en la sección que está en el plano de las chapas que une.



REMACHE SOMETIDO A CORTANTE SIMPLE

REMACHE SOMETIDO A CORTANTE DOBLE

Fig. 3

b) *Asiento* o *aplastamiento* de la chapa o el remache producido por la presión entre las superficies cilíndricas del remache y el agujero, como se ve en la Fig. 4. Para calcular la resistencia al aplastamiento se suele usar el producto de la proyección del área del agujero cilíndrico, esto es, el diámetro del agujero por el espesor de la chapa y de la resistencia a rotura por compresión del material. Las dos trazas de la proyección del área están indicadas por líneas de trazos en el plano diametral del remache, más abajo.

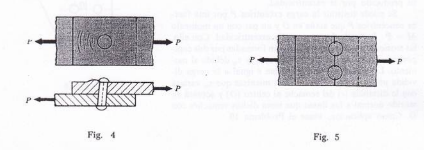


Fig. 4 Fig. 5

c) *Desgarramiento* de la chapa entre los agujeros debido a la falta de resistencia a tracción en la sección a lo largo de una fila de remaches. Este tipo de rotura está indicado en la Figura 5.

d) *Desgarramiento según una diagonal.* Está indicado en la Fig. 6. Sin embargo, este tipo de rotura no suele ocurrir si el paso entre filas es al menos $1\frac{1}{2}$ veces el diámetro del remache. En este libro supondremos que dicho paso tiene al menos esta proporción con el diámetro de los remaches, por lo que no estudiaremos este tipo de rotura.

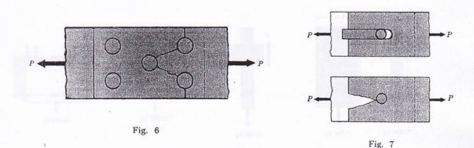


Fig. 6 Fig. 7

e) *Cortadura de la chapa* o, posiblemente, *desgarramiento de la chapa* entre un agujero de remache y el borde de la placa, como se ve en la Fig. 7. Estos tipos de rotura no suelen ocurrir si la distancia del centro del agujero al borde es aproximadamente el doble del diámetro del remache. En este libro supondremos que sucede así y no consideraremos este tipo de rotura.

Por consiguiente, en una unión remachada estudiaremos en este libro solo tres modos de rotura: (*a*) cortadura, (*b*) aplastamiento y (*c*) desgarramiento. Como ejemplo, véanse los Problemas 4-9.

UNIONES REMACHADAS EXCENTRICAS. Frecuentemente, en las estructuras, las uniones remachadas han de soportar solicitaciones excéntricas. Cuando la línea de acción de la fuerza aplicada P no pasa por el centro de gravedad O del grupo de remaches, como se ve en la Fig. 8, es evidente que la placa tenderá a girar respecto a un centro en el sentido del momento $M = P \cdot L$.

A veces, la tendencia a girar de este tipo de unión es tan grande, que las tensiones de los remaches debidas a la carga directa son mucho menores que las producidas por el momento. Por tanto, es de gran importancia el diseñar una unión excéntrica de tal modo que sea capaz de resistir el cortante debido a la carga vertical y el momento producido por la excentricidad.

Se puede sustituir la carga excéntrica P por una fuerza concéntrica P que actúa en O y un par con un momento $M = P \cdot L$, donde L representa la excentricidad. Con ello, las tensiones en los remaches estarán formadas por dos componentes, τ_a debida al cortante directo, y τ_m debida al momento. La tensión τ_a será uniforme e igual a la carga dividida por el número de remaches mientras que τ_m variará con la distancia (r) del remache al centro (O) y actuará en sentido normal a las líneas que unen dichos remaches con O. Como aplicación, véase el Problema 10.

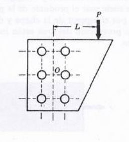


Fig. 8

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se ha aplicado una carga a una placa de acero soportada por una articulación sencilla, como se muestra en la Figura (a). Determinar la tensión cortante máxima en el pasador, la tensión de aplastamiento máxima y la de tracción en la sección neta de la placa.

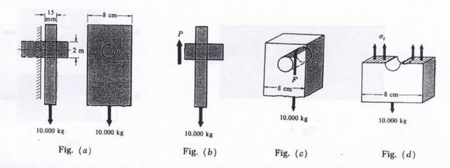


Fig. (a) Fig. (b) Fig. (c) Fig. (d)

El pasador está sometido al esfuerzo cortante que se indica en la Fig. (b) y que se representa por P. El área sobre la que actúa este esfuerzo cortante es la sección del pasador, esto es, $\frac{1}{4}\pi(2)^2 = 3{,}14\ \text{cm}^2$. Por tanto, la tensión cortante es

$$\tau = P/A_c = 10.000/3{,}14 = 3.184\ \text{kg/cm}^2$$

Para determinar la tensión de aplastamiento, hallaremos la fuerza a soportar al apoyar el pasador en la placa, que se representa por F en la Fig. (c). Para que exista equilibrio, $F = 10.000$ kg. La superficie de apoyo está dada por la proyección del área rayada sobre un plano horizontal por el diámetro del pasador, esto es, $A_a = (2)(1{,}5) = 3\ \text{cm}^2$. Por tanto, la tensión de aplastamiento es

$$\sigma_c = 10.000/3 = 3.333\ \text{kg/cm}^2$$

La sección neta está sometida a la tensión de tracción σ_t representada en la Fig. (*d*) de la página anterior. El área que resiste la tracción es $A_t = (8 - 2)(1,5) = 9$ cm². Por tanto, la tensión de tracción en el área rayada es

$$\sigma_t = 10.000/9 = 1.111 \text{ kg/cm}^2$$

2. Dos placas de acero de 15 mm están unidas con una unión por solapo de una fila de remaches como se muestra en la Fig. (*a*). El paso es de 6 cm y el diámetro de los remaches de 22 mm. La carga que soportan las placas es de 800 kg por centímetro de anchura. Determinar las tensiones máximas de corte, de aplastamiento y de tracción en la unión.

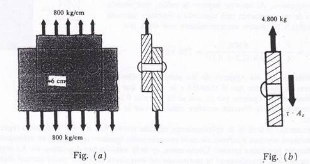


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Entre las líneas de trazos de la Fig. (*a*) hay un módulo repetitivo. La carga que soporta es 6(800) = 4.800 kg. El esquema de cuerpo en libertad de la Fig. (*b*) muestra el cortante que actúa en cada remache.

Al intentar separar las partes de la unión, la sección de cada remache está sometida a tensión a causa de la fuerza que se representa. Los agujeros son, generalmente, 1 mm más anchos en diámetro que los remaches y se suele admitir que éstos llenan el agujero completamente. Por tanto, la tensión cortante es

$$\tau = \frac{P}{A_c} = \frac{4.800}{\frac{1}{4}\pi(2,2 + 0,1)^2} = 1.155 \text{ kg/cm}^2$$

Para determinar la tensión de aplastamiento, consideraremos la sección representada en la Fig. (*c*). El aplastamiento se produce en las superficies curvas representadas por líneas gruesas. La superficie de apoyo de cada remache se halla considerando la proyección de esta superficie curva semicircular sobre un plano diametral vertical de dicho remache. Para cada uno de ellos, esta superficie proyectada vale $A_a = (1,5)(2,2 + 0,1) = 3,45$ cm². Nuevamente se ha supuesto que el remache llena el agujero, que es 1 mm mayor que el diámetro de aquél. Por tanto, la tensión de aplastamiento es

$$\sigma_a = P/A_a = 4.800/3,45 = 1.390 \text{ kg/cm}^2$$

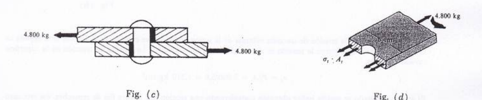


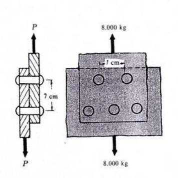
Fig. (*c*) Fig. (*d*)

Para determinar la tensión máxima de tracción en la unión, consideraremos la sección neta rayada de la Figura (*d*). El área eficaz que soporta la tensión es $A_t = (1,5)(6 - 2,3) = 5,55$ cm². La tensión de tracción en la superficie rayada es, pues,

$$\sigma_t = P/A_t = 4.800/5,55 = 865 \text{ kg/cm}^2$$

3. Considerar la unión por solapo de doble fila de remaches representada en la figura adjunta, en la que el paso de ambas filas es de 7 cm. Los remaches están al tresbolillo y miden 25 mm de diámetro. Cada placa tiene 15 mm de espesor. La fuerza que actúa sobre cada módulo repetitivo es de 8.000 kg. Hallar las tensiones cortante, de aplastamiento y de tracción máximas en la unión.

En un módulo como el representado entre las líneas de trazos en la figura adjunta, tenemos dos medios remaches y uno entero, o sea, dos completos. Al intentar separar la unión, una sección de cada uno de esos remaches está sometida a cortante (llamado cortante simple) y la tensión correspondiente está dada por



$$\tau = \frac{P}{A_c} = \frac{8.000}{2(\pi/4)(2,5 + 0,1)^2} = 750 \text{ kg/cm}^2$$

Hay que observar que los agujeros de los remaches suelen ser 1 mm mayores en diámetro que el remache y se supone que éste llena completamente el agujero, por lo que se ha sumado 0,1 cm en el denominador de la fórmula anterior para calcular la tensión cortante.

Para determinar la tensión de aplastamiento, consideraremos una sección tal como la representada en la Figura (*a*). Las mitades superior e inferior de cada remache están igualmente cargadas en aplastamiento, según las superficies indicadas por líneas gruesas. Como antes, en cada módulo hay dos remaches. La superficie de apoyo de cada remache se halla considerando la proyección del área curva sobre un plano vertical diametral del remache. Para cada uno de ellos, esta área proyectada está dada por el producto de la mitad de su altura (1,5 cm) por el diámetro del agujero (2,6 cm), o sea, $A_a = (1,5)(2,6) = 3,9$ cm², donde se ha añadido también 0,1 cm al diámetro del remache, pues se suele suponer que llena el agujero. Por consiguiente, la tensión de aplastamiento es

$$\sigma_a = P/A_a = 8.000/2(3,9) = 1.125 \text{ kg/cm}^2$$

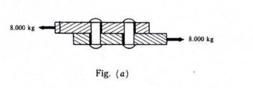


Fig. (*a*)

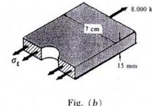


Fig. (*b*)

Para determinar la tensión de tracción máxima en la unión tenemos que considerar la sección neta rayada en la Fig. (*b*). El área que resiste la tensión es $A_t = (1,5)(7 - 2,6) = 6,6$ cm². La tensión de tracción en la superficie rayada es, pues,

$$\sigma_t = P/A_t = 8.000/6,6 = 1.210 \text{ kg/cm}^2$$

El mismo resultado se podría haber obtenido considerando una sección por la otra fila de remaches. En este caso habríamos deducido dos medios remaches, con lo que se habría obtenido, indudablemente, el resultado anterior.

4. Considerar la unión por solapo de una sola fila de remaches representada más abajo. El paso de remachado es de 6 cm, el espesor de las chapas 12 mm y los remaches tienen 19 mm de diámetro. Las tensiones de rotura recomendadas por el A. S. M. E. Boiler Code son: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm², compresión 6.650 kg/cm² (traducidas a unidades métricas, aproximadamente). Determinar la carga admisible en un módulo y el rendimiento de la unión.

Entre las líneas de trazos de la figura, se ha representado un módulo. Contiene dos medios remaches, esto es, uno entero. El área de este remache es $A_c = (\pi/4)(1,9 + 0,1)^2 = 3,14$ cm². La resistencia a cortante que puede ofrecer el remache es

$$\tau A_s = 3.100(3,14) = 9.740 \text{ kg}$$

Así, pues, la carga de rotura que puede soportar cada módulo, basada en la cortadura del remache, es 9.740 kg.

Consideremos ahora la resistencia al aplastamiento de la chapa frente a un remache, esto es, la rotura por aplastamiento. El remache apoya contra una superficie igual a la proyección del área semicilíndrica entre remache y agujero, sobre un plano diametral. Esta superficie mide $A_a = (1,9 + 0,1)(1,2) = 2,4$ cm². La resistencia al aplastamiento de un remache es, pues,

$$\sigma_a A_a = 6.650(2,4) = 15.960 \text{ kg}$$

Por tanto, la carga de rotura que puede soportar cada módulo, basada en la resistencia al aplastamiento, es de 15.960 kg.

Finalmente, determinaremos la carga que rasga la placa entre agujeros de remaches. El área neta que resiste esa tracción es $A_t = (1,2)(6 - 2) = 4,8$ cm². Por tanto, la resistencia al desgarramiento es

$$\sigma_t A_t = 3.850(4,8) = 18.500 \text{ kg}$$

El modo de rotura que ofrece menor resistencia es, pues, la cortadura de los remaches, con una carga de 9.740 kg en cada módulo. Por consiguiente, ésta es la carga admisible en dicho módulo. En un proyecto real, este valor tendría que ser dividido, indudablemente, por un coeficiente de seguridad, que iría desde 3 hasta 5.

La resistencia a tracción de una placa maciza de 6 cm de anchura y 12 mm de espesor es (6)(1,2)(3.850) = 27.720 kg, por lo que el rendimiento de la unión es (9.740/27.720)(100) = 35,1 %.

5. Considerar la unión por solapo de doble fila de remaches de la figura adjunta. El paso de roblonado es de 7,5 cm, el espesor de la placa 15 mm y los remaches tienen 19 mm de diámetro. De acuerdo con el A. S. M. E. Boiler Code, las tensiones de rotura recomendadas son: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm², compresión 6.650 kg/cm². Determinar el rendimiento de esta unión.

En el módulo representado entre líneas de trazos en el esquema, hay dos remaches enteros. La resistencia a cortante será, pues,

$$P_c = 2[(\pi/4)(1,9 + 0,1)^2](3.100) = 19.480 \text{ kg}$$

La resistencia al aplastamiento del módulo es

$$P_a = 2[(1,9 + 0,1)(1,5)](6.650) = 39.900 \text{ kg}$$

La carga que rasgaría la placa entre los agujeros de los remaches es

$$P_t = [(1,5)(7,5 - 2)](3.850) = 31.760 \text{ kg}$$

La carga de rotura mínima es, pues, 19.480 kg, que corresponde al tipo de rotura por cortante.

La resistencia a la tracción de una chapa maciza de 7,5 cm de anchura y 1,5 cm de espesor es (7,5)(1,5)3.850 = 43.310 kg. El rendimiento de la unión es, pues, (19.480/43.310)(100) = 45,0 %.

6. Considerar el diseño de una caldera con una costura longitudinal del tipo de solapo con doble fila de remaches. El diámetro de la caldera es de 210 cm; el espesor de la chapa, 20 mm; la anchura del módulo, 7,5 cm, y se em-

plean remaches de 19 mm. Determinar la presión interna admisible en la caldera. Utilizar las tensiones de rotura recomendadas por el A. S. M. E. Boiler Code siguientes: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm² y compresión 6.650 kg/cm², con un coeficiente de seguridad 5 para todos los tipos de tensiones. En la Fig. (*a*) aparece una parte de la caldera y su costura longitudinal.

Determinaremos primero la fuerza admisible P que puede actuar en un módulo. En cada uno hay dos remaches completos, por lo que la carga admisible basada en la resistencia al cortante es

$$P_c = 2[(\pi/4)(1{,}9 + 0{,}1)^2](3.100/5) = 3.895 \text{ kg}$$

La carga admisible basada en el aplastamiento, considerando dos remaches completos y las proyecciones de sus áreas, es

$$P_a = 2[(2)(1{,}9 + 0{,}1)](6.650/5) = 10.640 \text{ kg}$$

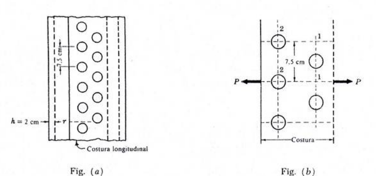


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

La carga que determina la rotura por tracción entre los agujeros se determina como sigue: La observación de un módulo indica que hay que estudiar dos secciones netas, designadas por 1-1 y 2-2 en la Fig. (*b*). Las fuerzas P representan la fuerza tangente que se produce en la caldera a causa de la presión interna. En el Problema 1 del Capítulo 3 se estudiaron en detalle estas fuerzas. En la Fig. (*c*) aparece el módulo correspondiente a 1-1; la carga admisible basada en la resistencia a tracción en esta sección es

$$P_t' = [(2)(7{,}5 - 2)](3.850/5) = 8.470 \text{ kg}$$

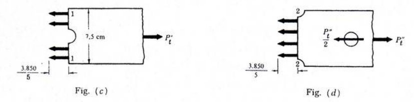


Fig. (*c*) Fig. (*d*)

Para calcular la carga admisible basada en la resistencia a tracción de la sección 2-2 indicada en la Fig. (*d*) hay que recordar que el remache de la fila de atrás soporta una fuerza $P_t''/2$ en cortante. Por consiguiente, el esquema de cuerpo en libertad del módulo correspondiente a 2-2 es como el de la Fig. (*d*). Para que exista equilibrio:

$$\Sigma F_h = P_t'' - \frac{P_t''}{2} - \frac{3.850}{5}(2)(7{,}5 - 2) = 0 \quad \text{y} \quad P_t'' = 16.940 \text{ kg}$$

Así, pues, la carga determinante en cada módulo es 3.895 kg, determinada por la resistencia a cortante. Esta carga, que actúa en dirección tangencial, corresponde a una tensión tangente de $3.895/[7{,}5(2)] = 260$ kg/cm². Según el Problema 1 del Capítulo 3 la tensión tangente σ_T en la caldera está dada por

$$\sigma_T = pr/h$$

donde p representa la presión interna, r el radio de la caldera y h el espesor de la pared. La tensión tangente de 260 kg/cm² corresponde a una presión p que se puede hallar sustituyendo valores en la ecuación última. Será $260 = p(210/2)/(2)$ y $p = 4{,}95$ kg/cm².

7. Considerar la unión a tope de una sola fila de remaches de la Fig. (*a*), donde el paso entre remaches es de 7,5 cm, las placas principales son de 12 mm de grueso y las cubrejuntas de 10 mm. El diámetro de los remaches es de 19 mm. De acuerdo con A. S. M. E. Boiler Code, las tensiones de rotura recomendadas son: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm², compresión 6.650 kg/cm². Determinar la carga admisible en cada módulo, basada en un coeficiente de seguridad 5.

La carga aplicada a la chapa superior se transmite a través de ella a los remaches superiores, luego a las dos chapas exteriores o cubrejuntas, y a través de los remaches inferiores a la placa inferior. Determinaremos tres valores de la capacidad de carga del módulo, uno de ellos basado en la resistencia al cortante, otro en la resistencia al aplastamiento y el tercero en la resistencia a tracción. La carga admisible es el menor de estos tres valores.

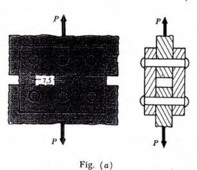


Fig. (*a*)

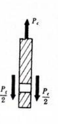


Fig. (*b*)

La carga admisible basada en la resistencia al cortante de los remaches se halla considerando el esquema de cuerpo en libertad de la placa principal superior, que aparece en la Fig. (*b*). Hay que observar que este remache está en un estado de *cortante doble*, esto es, la acción de cortante se produce en dos superficies. Utilizando la carga de rotura a cortante de 3.100 kg/cm² con un coeficiente de seguridad 5, tenemos

$$\tfrac{1}{2}P_c = \tfrac{1}{4}\pi(1{,}9 + 0{,}1)^2(3.100/5) \quad \text{y} \quad P_c = 3.895 \text{ kg}$$

La carga admisible basada en la resistencia al aplastamiento se halla considerando el esquema de cuerpo en libertad de la chapa principal superior de la Fig. (*c*). La carga P_a que causa la tensión de aplastamiento admisible es

$$P_a = (1{,}2)(1{,}9 + 0{,}1)(6.650/5) = 3.200 \text{ kg}$$

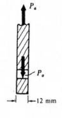


Fig. (*c*)

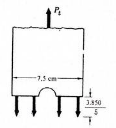


Fig. (*d*)

Debe observarse que no es necesario considerar la posibilidad de rotura a aplastamiento en los cubrejuntas porque el espesor total de las dos chapas (20 cm) proporciona una superficie de apoyo mayor que la que existe en medio, en la chapa principal.

La carga admisible basada en la resistencia a tracción se puede hallar considerando el esquema de cuerpo en libertad de la chapa principal superior de la Fig. (*d*) de la página anterior. La carga P_t que produce desgarramiento entre los remaches en la chapa principal es

$$P_t = (1,2)(7,5 - 2)(3.850/5) = 5.080 \text{ kg}$$

Hay que observar que no es necesario considerar el desgarramiento de los cubrejuntas, pues el espesor total de estas dos chapas da una superficie mayor para resistir la tracción que la existente en la chapa principal.

La carga admisible en el módulo es, pues, de 3.200 kg, determinada por la capacidad de aplastamiento.

8. Considerar la unión a tope de doble fila de remaches de la Fig. (*a*), donde el paso de remachado es de 7,5 cm, las placas principales tienen 12 mm de espesor y los cubrejuntas 10 mm. El diámetro de los remaches es de 19 mm. De acuerdo con la norma A. I. S. C., las tensiones admisibles son: tracción 1.400 kg/cm², cortante 1.050 kg/cm² y compresión 2.800 kg/cm² (traducidas a unidades métricas y redondeadas). Determinar la carga admisible en cada módulo, y el rendimiento.

En la Fig. (*a*) se representa un módulo entre líneas de trazos. Determinaremos un valor de la carga admisible basándonos en la resistencia a cortante, otro en la de aplastamiento y un tercero en la de tracción. El menor de estos tres valores será la carga admisible.

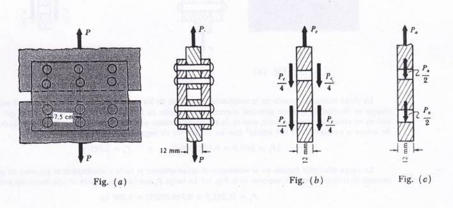


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

La carga admisible basada en la resistencia a cortante de los remaches se halla considerando el esquema de cuerpo en libertad de la placa principal superior de la Fig. (*b*). Como en el Problema 7, cada remache está sometido a *cortante doble*. Como la tensión admisible es 1.050 kg/cm², tenemos

$$\tfrac{1}{4}P_c = \tfrac{1}{4}\pi(1,9 + 0,1)^2(1.050) \quad \text{y} \quad P_c = 13.200 \text{ kg}$$

La carga admisible basada en la resistencia al aplastamiento se halla considerando el esquema de cuerpo en libertad de la placa principal superior de la Fig. (*c*). La carga P_a que produce la tensión de aplastamiento admisible es

$$\tfrac{1}{2}P_a = (1,2)(1.9 + 0.1)(2.800) \quad \text{y} \quad P_a = 13.440 \text{ kg}$$

La carga necesaria para producir la tensión de aplastamiento en los cubrejuntas es mayor que 13.440 kg porque el espesor conjunto de los dos (20 mm) es mayor que los 12 mm de espesor de la chapa principal.

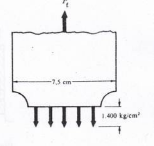


Fig. (*d*)

La carga admisible basada en la resistencia a tracción se puede hallar considerando el esquema de cuerpo en libertad de la chapa superior, de la Fig. (*d*) anterior. La carga P_t que origina el desgarramiento entre remaches en la chapa principal es

$$P_t = (1,2)(7,5 - 2)(1.400) = 9.240 \text{ kg}$$

No es necesario comprobar la carga que produciría desgarramiento en los cubrejuntas, porque sería mayor de 9.240 kg, ya que su espesor conjunto es mayor que el de la chapa principal.

Por tanto, la carga admisible en cada módulo es de 9.240 kg, determinada por la resistencia a tracción.

Si no hubiera agujeros de remaches en la placa principal, su resistencia a tracción admisible sería

$$(1,2)(7,5)(1.400) = 12.600 \text{ kg}$$

El rendimiento de la unión se define como el cociente de la carga admisible y la resistencia admisible a tracción de la placa maciza con la misma anchura, o sea (9.240/12.600)(100) = 73,3 %.

9. Considerar la unión a tope de doble fila de remaches de la Fig. (*a*), en la cual un cubrejuntas es más ancho que el otro. Este tipo de construcción se emplea mucho en las uniones estancas y se aplica un retacado a los bordes de la placa más estrecha. El paso de remachado es de 7,5 cm en la fila interior y 15 cm en la exterior. Las chapas principales tienen 12 mm de espesor, los cubrejuntas 8 mm y el diámetro de los remaches es de 19 mm. De acuerdo con la norma A. I. S. C. de edificación, las tensiones admisibles son: tracción 1.400 kg/cm², cortante 1.050 kg/cm² y compresión 2.800 kg/cm². Determinar la carga admisible en un módulo y su rendimiento.

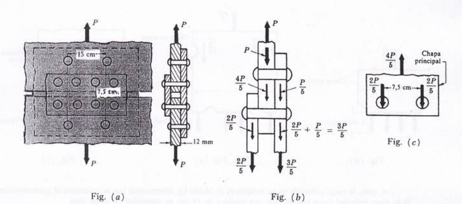


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

Entre líneas de trazos se representa en la Fig. (*a*) un módulo. Para cada chapa principal tenemos dos remaches en cortante doble y uno en simple, esto es, cinco superficies para resistir el cortante. Supondremos que las resistencias al cortante de todas ellas son iguales, con lo que la carga admisible debida a esta resistencia a cortante es

$$P_c = 5[\tfrac{1}{4}\pi(1,9 + 0,1)^2(1.050)] = 18.050 \text{ kg}$$

Como se ha supuesto que la resistencia de los remaches es igual, el remache simple de la fila exterior soportará un quinto de la carga total P, y cada uno de los dos remaches interiores dos quintos de esa carga total. Por tanto, la distribución de la carga P en la mitad superior de la unión se puede representar como en la Figura (*b*).

Consideremos, ahora, la resistencia al aplastamiento. Evidentemente, la superficie crítica está en la fila interior de remaches de la chapa principal, pues el espesor conjunto de los cubrejuntas es mayor que el de dicha chapa. En el esquema de cuerpo en libertad de la Fig. (*c*) se ve que la fuerza de aplastamiento que actúa en cada remache de la fila interior es $2P/5$. Obsérvese que la chapa principal que aparece en este esquema está cortada *por debajo*

de la fila exterior de remaches, por lo que la fuerza en la chapa es $4P/5$ y no P. La carga de aplastamiento admisible es, pues,

$$2P_a/5 = (1,2)(1,9 + 0,1)(2.800) \quad \text{y} \quad P_a = 16.800 \text{ kg}$$

Ahora estudiaremos varias cargas admisibles, basada cada una de ellas en la resistencia a tracción de los distintos elementos de un módulo. Primero consideraremos la tracción en la sección neta de la placa principal, en la fila exterior de remaches, que puede calcularse considerando el esquema de cuerpo en libertad de la Figura (*d*).

$$P_t' = (1,2)(15 - 2)(1.400) = 21.840 \text{ kg}$$

Seguidamente, hay que considerar la tracción en la sección neta de la chapa principal en la fila interior de remaches, que puede representarse como en la Fig. (*e*). Hay que observar que cada una de las fuerzas $P_t''/10$ representadas corresponde a la fuerza de aplastamiento que ejerce un medio remache (de la fila exterior) sobre la placa principal. Para que exista equilibrio,

$$\Sigma F_v = P_t'' - P_t''/5 - (1,2)[15 - 2(2)](1.400) = 0 \quad \text{y} \quad P_t'' = 23.100 \text{ kg}$$

Finalmente, estudiaremos la tracción en el cubrejuntas. Como hemos visto que el mayor de ellos soporta 3/5 de la carga, las tensiones serán mayores en él que en el más corto. La sección crítica está en la fila interior de remaches, pues es la que tiene menor área. En la Fig. (*f*) aparece un esquema de cuerpo en libertad. Cada una de las fuerzas $P_t'''/5$ que se indican representa la acción de aplastamiento de un remache de este cubrejuntas. Para que exista equilibrio,

$$\Sigma F_v = 3P_t'''/5 - (0,8)[15 - 2(2)](1.400) = 0 \quad \text{y} \quad P_t''' = 20.530 \text{ kg}$$

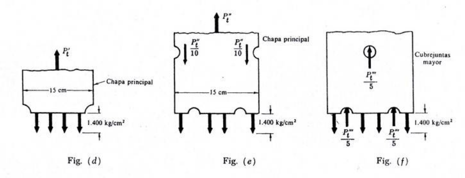


Fig. (*d*) Fig. (*e*) Fig. (*f*)

Así, pues, la carga admisible en un módulo es de 16.800 kg, determinada por la resistencia al aplastamiento. Si la placa principal fuera maciza, con una anchura de 15 cm, su capacidad de carga sería

$$(1,2)(15)(1.400) = 25.200 \text{ kg}$$

por lo que el rendimiento de la unión es $(16.800/25.200)(100) = 66,7\,\%$.

10. En la figura adjunta se ha representado una unión remachada, cargada excéntricamente. La carga aplicada es de 9.000 kg y actúa con una excentricidad de 20 cm desde el eje geométrico del grupo de seis remaches de 19 mm. Determinar la tensión cortante máxima en los remaches.

En la Fig. (*a*) de la página siguiente se muestra en el esquema de cuerpo en libertad la resistencia que oponen los remaches en contacto con la placa a la fuerza aplicada. Esta resistencia consiste en una fuerza de 9.000 kg que actúa en el centro de gravedad del grupo de remaches, juntamente con un par de magnitud $(9.000)(20) = 180.000$ kg-cm. La fuerza resis-

tente de 9.000 kg proviene del efecto de cortante vertical de la carga, y el par del efecto torsor de la carga excéntrica.

La fuerza resistente dirigida hacia arriba de 9.000 kg es la resultante de seis fuerzas de cortadura verticales, que se suponen todas del mismo valor (1.500 kg), distribuidas en los seis remaches. En la Fig. (*b*) se muestran esos seis cortantes.

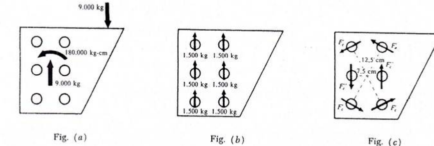


Fig. (*a*) Fig. (*b*) Fig. (*c*)

El momento resistente de 180.000 kg-cm es el momento resultante de los esfuerzos cortantes adicionales que actúan en los remaches cada uno de ellos en dirección perpendicular a la recta radial desde el centro de gravedad del grupo de remaches al remache considerado. Estos esfuerzos cortantes se representan por F_c' y F_c'' y son como se indican en la Fig. (*c*). A causa de la simetría, los cuatro remaches de los ángulos están sometidos a la misma fuerza F_c', según se indica. La acción de un grupo de remaches que soportan una carga excéntrica es análoga a la de un árbol circular sometido a torsión (véase el Capítulo 5), por lo que resulta razonable suponer que las fuerzas cortantes F_c' y F_c'' son proporcionales a las distancias de los respectivos remaches al centro de gravedad del grupo. Podremos escribir, pues, $F_c'/12,5 = F_c''/7,5$ o $F_c'' = (7,5/12,5)F_c' = (3/5)F_c'$.

La suma de los momentos de esas seis fuerzas de cortadura debe ser igual al momento del par resultante de 180.000 kg-cm, luego

$$4F_c'(12,5) + 2F_c''(7,5) = 180.000$$

Sustituyendo $F_c'' = (3/5)F_c'$ y despejando, obtenemos $F_c' = 3.050$ kg y $F_c'' = 1.830$ kg.

Las fuerzas resistentes resultantes en los remaches se hallan superponiendo esas fuerzas con los esfuerzos cortantes verticales de 1.500 kg hallados antes. Estos esfuerzos cortantes son, indudablemente, cantidades vectoriales y la resultante en cada remache hay que determinarla por la conocida ley del paralelogramo de composición de vectores. En la Fig. (*d*) se muestran esas resultantes R_1 a R_4.

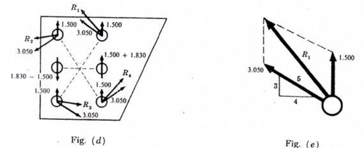


Fig. (*d*) Fig. (*e*)

Observando las adiciones de vectores anteriores es evidente que R_1 y R_4 son iguales en magnitud, y que esta magnitud es mayor que las de R_2 y R_3. En la Fig. (*e*) aparece un esquema ampliado de las fuerzas que actúan en el remache superior derecho. Analítica o gráficamente se halla que R_1 es 4.125 kg. Este valor es mayor que la fuerza de cortadura vertical de 3.330 kg que actúa en el remache central de la columna de la derecha, por lo que es el esfuerzo cortante mayor en los remaches.

Por tanto, la tensión cortante máxima está dada por $(\tau)_{max} = R_1/A_c$, donde A_c representa el área del remache, suponiendo como siempre que éste llene todo el agujero, que es 1 mm más ancho que él. Así, para la tensión cortante máxima tenemos

$$(\tau)_{max} = \frac{4.125}{\frac{1}{4}\pi(1{,}9 + 0{,}1)^2} = 1.315 \text{ kg/cm}^2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Dos chapas de acero de 12 mm de espesor están unidas con una unión por solapo de una sola fila de remaches. El paso de remachado es de 6,50 cm y el diámetro de los remaches 19 mm. La carga que soporta una longitud de chapa de 6,50 cm es de 3.000 kg. Determinar las tensiones cortante, de aplastamiento y de tracción máximas en la unión. *Sol.* $\tau = 955$ kg/cm², $\sigma_a = 1.250$ kg/cm², $\sigma_t = 555$ kg/cm²

12. Una caldera de 9 m de diámetro está hecha de chapa de 8 mm. La costura longitudinal tiene una sola fila de remaches de 16 mm, separados 5 cm entre centros. Las tensiones unitarias admisibles son: en tracción 1.100 kg/cm², en cortante 850 kg/cm² y en compresión 1.700 kg/cm². ¿Cuál es el rendimiento de la unión y qué presión máxima se admite en la caldera? Suponer que los agujeros de los remaches son 2 mm más anchos que ellos.
Sol. Rendimiento, 49,2 %; presión interna, 0,96 kg/cm²

13. Un tanque cilíndrico de 60 cm de diámetro está sometido a una presión interna de 20 kg/cm². La costura longitudinal es una unión por solapo de doble fila de remaches en la que el paso de remachado es de 7,50 cm en ambas filas. Los remaches están al tresbolillo y tienen 19 mm de diámetro. El espesor de la pared del tanque es de 15 mm. Determinar las tensiones máximas cortante, de aplastamiento y de tracción en la unión.
Sol. $\tau = 715$ kg/cm², $\sigma_a = 750$ kg/cm², $\sigma_t = 545$ kg/cm²

14. Dos chapas de 15 mm de espesor están unidas con una unión por solapo de una fila de remaches. El paso de remachado es de 7,5 cm y el diámetro de los remaches 22 mm. Las tensiones de rotura sugeridas por el A. S. M. E. Boiler Code son: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm² y compresión 6.650 kg/cm². Determinar la carga admisible en un módulo utilizando un coeficiente de seguridad 5, así como el rendimiento de la unión.
Sol. 2.575 kg, 29,7 %

15. Dos chapas de 15 mm de espesor están unidas con una unión por solapo de doble fila de remaches. El paso en ambas filas es de 9 cm y los remaches tienen 25 mm de diámetro. De acuerdo con el A. S. M. E. Boiler Code, las tensiones de rotura recomendadas son: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm² y compresión 6.650 kg/cm². Determinar la carga de rotura de un módulo y el rendimiento. *Sol.* 32.900 kg, 63,4 %

16. La costura longitudinal de una caldera consiste en una unión por solapo de doble fila de remaches. El diámetro de la caldera es de 3 m y el espesor de la chapa 22 mm, se usan remaches de 25 mm y la anchura de un módulo es de 7,5 cm. Determinar la presión interna admisible si en el diseño se usan las tensiones de rotura del A. S. M. E. Boiler Code: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.100 kg/cm² y compresión 6.650 kg/cm² con un coeficiente de seguridad 5. *Sol.* 5,85 kg/cm²

17. Volver a considerar el Problema 7, pero utilizando ahora la norma A. I. S. C. de edificación para determinar la carga admisible en un módulo. Según esta norma, las tensiones admisibles son: tracción 1.400 kg/cm², cortante 1.050 kg/cm² y compresión 2.800 kg/cm². *Sol.* 6.500 kg

18. La costura longitudinal de una caldera consiste en una unión a tope de doble fila de remaches. El diámetro de la caldera es de 3 m, el espesor de la chapa 22 mm, se usan remaches de 25 mm y la anchura de un módulo es de 7,5 cm. Los cubrejuntas tienen un espesor de 12 mm y son ambos de la misma anchura. Determinar la presión

interna admisible si se utilizan las tensiones de rotura del A. S. M. E. Boiler Code: tracción 3.850 kg/cm², cortante 3.150 kg/cm², compresión 6.650 kg/cm² con un coeficiente de seguridad 5. Comparar estos resultados con los obtenidos para la misma caldera en el Problema 16, en que se consideró una unión por solapo de doble fila de remaches. *Sol.* 7,4 kg/cm²

19. Hay que unir dos chapas de acero de 40 cm por 10 mm con una unión por solapo utilizando remaches de 22 mm. Las tensiones admisibles son: tracción 1.260 kg/cm², cortante 945 kg/cm² y compresión 1.900 kg/cm². Diseñar una unión con rendimiento máximo.
Sol. Una unión con 12 remaches dispuestos en seis filas 1 : 2 : 3 : 3 : 2 : 1.
La unión resistirá 47.115 kg con un rendimiento del 93,5 %.

20. Considerar la unión remachada cargada excéntricamente de la Fig. (*a*). Los remaches son de 19 mm de diámetro. Determinar la tensión cortante máxima en los remaches. *Sol.* 585 kg/cm²

21. Considerar la unión remachada, cargada excéntricamente, de la Fig. (*b*). Los remaches son de 16 mm de diámetro. Determinar la tensión cortante máxima en los remaches. *Sol.* 750 kg/cm²

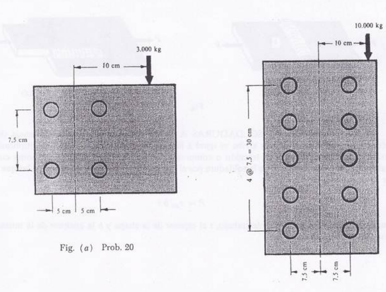


Fig. (*a*) Prob. 20

Fig. (*b*) Prob. 21

CAPITULO 14

Uniones soldadas

TIPOS DE SOLDADURA. En las estructuras se encuentran dos tipos ordinarios de uniones soldadas de chapas. Se conocen por soldaduras a tope y en ángulo. En la Fig. 1 están representados ambos tipos. Las soldaduras a tope pueden actuar solo en tracción y en compresión, mientras que las en ángulo soportan cortante lo mismo que tracción y compresión y, a veces, además, flexión. La soldadura se ejecuta o por el arco eléctrico o con gas, aunque el primer método sea el más usado.

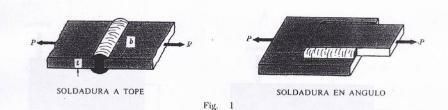


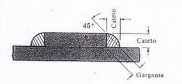
Fig. 1

RESISTENCIA DE LAS SOLDADURAS A TOPE. Se supone que la resistencia de la soldadura a tope representada más arriba es igual a la sección total de la soldadura multiplicada por la tensión de trabajo admisible en tracción o compresión para el material soldado. Se toma como área total el producto de la longitud de la soldadura por el espesor de la chapa más delgada de las que se unen. Por consiguiente, se tiene

$$P = \sigma_{sol}\, b\, t$$

donde σ_{sol} representa la tensión de trabajo, t el espesor de la chapa y b la anchura de la misma. Puede verse en el Problema 1.

RESISTENCIA DE LAS SOLDADURAS EN ANGULO. Antes de calcular la resistencia de la soldadura en ángulo representada más arriba es necesario definir varias dimensiones características de la misma. En la sección del esquema adjunto, la soldadura tiene *anchuras de cordón* o *catetos*, iguales, y la dimensión mínima de su sección se llama *garganta*. Evidentemente, la garganta es igual al producto de la anchura del cordón por sen 45°. Es costumbre suponer que solo hay que considerar la resistencia al cortante de estas soldaduras, pues el fallo se suele producir por cortante a 45° en la garganta. Por ello, se toma la resistencia de la soldadura igual al producto del área total en la garganta por la tensión de trabajo admisible a cortante en el material. Como ejemplos, véanse los Problemas 2 y 3.



En la soldadura en ángulo de la Fig. 1, el cordón corre en la dirección de la carga. A veces se añade

un cordón perpendicular a esa dirección en el extremo de la placa más estrecha, además de los representados. De acuerdo con los estudios realizados por el Welding Research Council americano, lós cordones perpendiculares a la dirección de la carga aplicada son algo más fuertes (por unidad de longitud de soldadura) que los que siguen la de la carga. Sin embargo, es costumbre considerar ambos tipos como si tuvieran la misma resistencia.

TENSIONES DE TRABAJO EN LAS SOLDADURAS. El Código de Soldaduras por Fusión de la Sociedad Americana de la Soldadura (A. W. S.) determina las resistencias de trabajo siguientes para las soldaduras de estructuras (traducidas a unidades métricas y redondeados los valores):

Tensión cortante.......... 790 kg/cm²
Tensión de tracción........ 910 kg/cm²
Tensión de compresión..... 1.260 kg/cm²

La tensión admisible en cortante está fijada de modo que en unidades americanas corresponda una fuerza de 1.000 libras por pulgada de longitud, para una soldadura de 1/8 de pulgada de cateto.

En unidades métricas se podría fijar aproximadamente que para una soldadura de ángulo de 1 cm de cateto o 0,707 cm de garganta, la carga admisible es de 560 kg/cm de longitud de junta, por lo que pueden considerarse las cargas admisibles siguientes por unidad de longitud:

280 kg para un cordón de 5 mm
448 kg para un cordón de 8 mm
560 kg para un cordón de 10 mm
670 kg para un cordón de 12 mm
840 kg para un cordón de 15 mm

CASOS PARTICULARES DE SOLDADURAS EN ANGULO

a) *Torsión en una soldadura en ángulo circular*. Está representada en la Fig. 2 de más abajo. El par T actúa en el árbol circular de diámetro d. La anchura del cordón de la soldadura se designa por a. En el Problema 4 se demuestra que la tensión cortante máxima en la soldadura está dada por

$$(\tau)_{\max} = \frac{2{,}83T}{\pi a d^2}$$

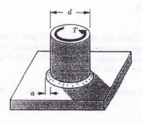


Fig. 2

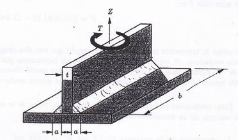


Fig. 3

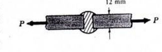
b) Torsión resistida por dos soldaduras en ángulo largas próximas. Este caso está representado en la Fig. 3 de la página anterior. El par T actúa en una chapa vertical unida a otra horizontal por dos soldaduras en ángulo iguales de longitud b y anchuras de cordón a. En el Problema 6 se demuestra que la tensión cortante máxima en los cordones de soldadura está dada aproximadamente por

$$(\tau)_{max} = \frac{4{,}24T}{ab^2}$$

c) Torsión resistida por soldaduras en ángulo muy separadas. Es el caso cuando el elemento vertical que se representa en la Fig. 3 es muy grueso, de modo que t sea del mismo orden de magnitud que b En este caso, es muy difícil un estudio racional. Puede no estar justificado el empleo de la fórmula de torsión del caso *a*) anterior (véase el Problema 4), porque en el Capítulo 5 se hizo notar que la fórmula de la torsión solo es válida para elementos de sección circular y no para los de forma rectangular. Aunque esta fórmula pueda dar una aproximación grosera de la tensión cortante máxima en la soldadura de ángulo no debe creerse que el resultado es siempre bastante exacto. La parte de soldadura a mayor distancia del centro del elemento vertical puede que no sea la sometida a mayor tensión. Sin embargo, si los elementos vertical y horizontal son gruesos y rígidos ambos, la tensión cortante en las soldaduras de ángulo será aproximadamente proporcional a su distancia al centro de gravedad de las áreas de la soldadura y, en este caso, será posible obtener una aproximación suficiente de las tensiones cortantes aplicando la fórmula de la torsión.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el esquema adjunto se representa una soldadura a tope que une dos chapas. Cada chapa tiene 12 mm de espesor y 20 cm de anchura. El Código de Soldaduras por Fusión de la A. W. S. señala una tensión de trabajo admisible de 910 kg/cm² para una unión de este tipo sometida a tracción. Determinar la carga de tracción admisible P que puede aplicarse a las placas.



Generalmente, se supone que la resistencia de esa soldadura es igual al producto de la tensión de tracción de trabajo del material por la sección de la misma. La norma da que la tensión es de 910 kg/cm² y la sección es igual al producto de la longitud de la soldadura (20 cm) por el espesor de la chapa (1,2 cm). Por tanto, la carga de tracción admisible P es

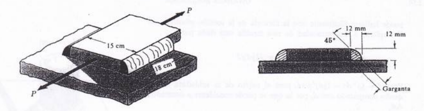
$$P = 910(20)(1{,}2) = 21.840 \text{ kg}$$

2. Más abajo se representa una soldadura en ángulo que une dos chapas. Cada una de ellas tiene 12 mm de espesor y cada soldadura, 18 cm de longitud. El Código de Soldaduras por Fusión indica una tensión de trabajo admisible de 790 kg/cm² para una carga de cortadura en esa unión. Determinar la carga de tracción admisible P que se puede aplicar a las chapas. La carga se aplica en el punto medio entre las dos soldaduras.

Estas soldaduras de ángulo tienen *catetos* iguales. como se ve en la sección de la página siguiente, y la dimensión mínima de la sección se llama *garganta*.

La dimensión de la garganta es 1,2 sen 45° = 0,848 cm.

El área eficaz de la soldadura que resiste el cortante está dada por el producto de su longitud y la dimensión de la garganta, o sea, que: área de la soldadura = 18(0,848) = 15,26 cm², para cada una de las dos.



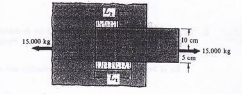
Por tanto, la carga de tracción admisible P es igual al producto de la tensión de trabajo en cortante y el área que lo resiste, o sea

$$P = 790(2)(15{,}26) = 24.100 \text{ kg}$$

Utilizando un valor para el cortante de 670 kg/cm de soldadura, tendríamos el mismo valor: $P = 670(36) = 24.100$ kg.

Estas soldaduras de ángulo están sometidas, evidentemente, a tensiones de flexión así como de tracción, además de las anteriormente consideradas tensiones cortantes. En general, no se tienen en cuenta, porque el fallo se produce por cortante en la garganta.

3. En la figura adjunta, las chapas de 15 mm están sometidas a fuerzas de 15.000 kg aplicadas excéntricamente, como puede verse. Determinar las longitudes L_1 y L_2 de los cordones para que tengan la misma tensión cortante. Utilizar el Código de Soldadura por Fusión.



Los catetos de la soldadura son iguales al espesor de la chapa, es decir, de 15 mm, por lo que la garganta vale

$$(1{,}5)(0{,}707) = 1{,}06 \text{ cm}$$

El área que resiste el cortante es, pues $(L_1 + L_2)(1{,}06)$ cm², donde L_1 y L_2 representan las longitudes de los cordones.

Es costumbre dimensionar las longitudes L_1 y L_2 de modo que las dos soldaduras estén sometidas a la misma tensión cortante, lo que significa que la resultante de las dos fuerzas de cortadura en las soldaduras debe coincidir con la línea de acción de la carga de 15.000 kg. En otras palabras, los momentos de las dos fuerzas de cortadura respecto a cualquier punto de esa línea de acción han de ser iguales. Así, para una tensión cortante admisible de 790 kg/cm², tenemos

$$790(1{,}06)(L_1)(5) = 790(1{,}06)(L_2)(10) \quad \text{y} \quad L_1 = 2L_2$$

La longitud de soldadura necesaria para resistir la carga de 15.000 kg está dada por

$$(L_1 + L_2)(1{,}06)(790) = 15.000$$

Pero $L_1 = 2L_2$, por lo que $(3L_2)(1{,}06)(790) = 15.000$ y $L_2 = 6$ cm, $L_1 = 12$ cm.

4. Determinar la tensión cortante máxima en la soldadura de ángulo que une un árbol circular a una chapa, como se muestra en la página siguiente. El árbol está sometido a un par aplicado T. Cada cateto de la soldadura se designa por a.

Si se considera que el árbol está orientado verticalmente, la chapa estará en un plano horizontal. La tensión cortante en la soldadura de ángulo en un plano horizontal que coincide con la cara superior de la chapa

puede hallarse fácilmente con la fórmula de la torsión estudiada en el Capítulo 5. La intensidad de esta tensión está dada por

$$\tau = T\rho/J = T(\tfrac{1}{2}d)/J$$

Pero $J = \int \rho^2\,da = (\tfrac{1}{2}d)^2 \pi a d$, pues el cateto de la soldadura es pequeño comparado con d, por lo que se puede considerar ρ constante. Así,

$$\tau = \frac{T(\tfrac{1}{2}d)}{(\tfrac{1}{2}d)^2 \pi a d} = \frac{2T}{\pi a d^2}$$

Esta tensión cortante se produce en un plano horizontal, a lo largo de un cateto de la soldadura de ángulo. No es la tensión cortante máxima, que se produce en la garganta a 45° con este plano horizontal. Como se puede ver en el tercer esquema de este capítulo, la longitud de la garganta es igual al producto del cateto por sen 45°. Como la garganta es menor que el cateto, la tensión cortante será mayor en ella que en un plano que coincida con aquél. Por tanto, tendremos la tensión cortante máxima, en una sección a 45°,

$$(\tau)_{max} = \frac{2T}{\pi a d^2 (0{,}707)} = \frac{2{,}83T}{\pi a d^2}$$

5. En el problema anterior, el árbol tiene 5 cm de diámetro y está unido a la chapa por una soldadura de ángulo de 6 mm. Utilizando el Código de Soldadura por Fusión, determinar el par máximo que puede soportar la unión soldada

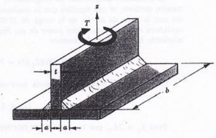
En el Problema 4 se halló que la relación que determina el par es

$$(\tau)_{max} = \frac{2{,}83T}{\pi a d^2}$$

Según el Código citado, la tensión de trabajo en cortante no debe exceder de 790 kg/cm². Por tanto,

$$790 = \frac{2{,}83T}{\pi(0{,}6)(5)^2} \quad \text{y} \quad T = 13.150 \text{ kg-cm}$$

6. Determinar la tensión cortante máxima en la soldadura de ángulo que une las dos chapas rígidas representadas en la figura adjunta. La chapa vertical está sometida a un par T que actúa en un plano horizontal, según se indica. Las soldaduras son iguales y los catetos de cada una tienen una longitud a.



El par aplicado T tiende a hacer girar la chapa vertical respecto al eje z por su punto medio. Este giro lo resisten las tensiones cortantes producidas entre las dos soldaduras de ángulo y la chapa horizontal. Si las dos chapas son totalmente rígidas, es razonable suponer que las intensidades de estas tensiones cortantes varían desde cero en el eje z hasta un mínimo en los extremos de la chapa, esto es, en $\pm b/2$. Representemos por τ la tensión cortante en un plano horizontal en los extremos de la chapa. La variación de esta tensión es análoga a la de la tensión normal en la altura b de una viga sometida a flexión pura. Por tanto, por analogía, el valor de τ en las fibras extremas es

$$\tau = \frac{Mc}{I} = \frac{T(b/2)}{(2a)(b^3)/12} = \frac{3T}{ab^2}$$

Nuevamente, como en el Problema 4, ésta no es la tensión cortante máxima en la soldadura de ángulo, sino que el máximo tiene lugar en la garganta, a 45° con este plano horizontal. La distancia de la garganta es menor que la longitud del cateto, en la proporción de sen 45°por lo que la tensión cortante será mayor en dicha garganta que en un plano que coincida con un cateto. Así, pues, esa tensión cortante máxima será

$$(\tau)_{max} = \frac{3T}{ab^2(0,707)} = \frac{4,24T}{ab^2}$$

7. En el Problema 6, las chapas tienen una longitud de 50 cm cada una y están unidas con dos soldaduras de ángulo de 1 cm. Determinar, usando el Código de Soldaduras por Fusión, el par máximo que puede resistir la unión soldada.

En el Problema 6 se halló que la relación entre la tensión cortante máxima en las soldaduras y el par es

$$(\tau)_{max} = \frac{4,24T}{ab^2}$$

Según el Código citado, la tensión cortante admisible es de 790 kg/cm², por lo que

$$790 = \frac{4,24T}{(1)(50)^2} \quad \text{y} \quad T = 466.000 \text{ kg-cm}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

8. Dos chapas de acero de 12,5 cm de anchura por 12 mm de espesor están soldadas a tope en sus extremos. El Código de Soldaduras por Fusión de la A. W. S. determina una tensión de trabajo admisible de 910 kg/cm² para esa unión sometida a tracción. Determinar la carga de tracción admisible que se puede aplicar a las chapas.
Sol. 13.650 kg

9. Un tanque de gas, esférico, está formado por dos semiesferas de chapa de acero de 15 mm soldadas entre sí a tope. El Código de Soldaduras por Fusión indica una tensión de trabajo admisible de 910 kg/cm² para este tipo de uniones sometidas a tracción. El tanque tiene 12 m de diámetro. Determinar la presión interna admisible a la que puede estar sometido el tanque. *Sol.* 4,55 kg/cm²

10. Dos chapas están unidas por soldaduras de ángulo, como se ve en la Fig. (*a*), y sometidas a una tracción de 40.000 kg. ¿Qué longitud L de soldadura de 11 mm se necesita para resistir esa carga? La tensión de trabajo admisible en cortante para ese material es de 790 kg/cm². *Sol.* 32,5 cm

11. Un angular de 120 × 120 × 13 mm con la sección de la Fig. (*b*) está soldado con soldaduras de ángulo de 13 mm a una chapa de acero plana. Se aplica a la unión una fuerza de tracción de 30.000 kg, como se indica. Esta fuerza actúa en el centro de gravedad del angular, que está situado a 3,44 cm de sus caras exteriores. Determinar las longitudes de las soldaduras L_1 y L_2, necesarias para que estén sometidas a la misma tensión cortante. La tensión cortante admisible en las soldaduras es de 790 kg/cm². *Sol.* L_1 = 29,5 cm, L_2 = 11,8 cm

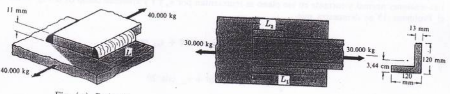


Fig. (*a*) Prob. 10

Fig. (*b*) Prob. 11

CAPITULO 15

Tensiones compuestas

INTRODUCCION. Hasta ahora hemos considerado en este libro tensiones en barras sometidas a carga axial, árboles sujetos a torsión y vigas sometidas a flexión, así como varios casos sobre depósitos de presión de pared delgada y uniones remachadas. Hay que tener en cuenta que hemos considerado una barra, por ejemplo, sometida a la vez solo a un tipo de carga, pero frecuentemente sobre esas barras actúan simultáneamente varias de las solicitaciones mencionadas más arriba, tales como flexión y torsión, por ejemplo, y hay que determinar el estado de tensiones en estas condiciones. Como las tensiones normal y cortante son magnitudes vectoriales, hay que tener mucho cuidado al combinar los valores dados por las expresiones para solicitaciones simples, deducidas en los capítulos precedentes. El objeto de este capítulo es el estudio del estado de tensiones en un plano arbitrario que corta a un elemento de un cuerpo sometido a varias solicitaciones simultáneas.

CASO GENERAL DE TENSION BIDIMENSIONAL. En general, si se separa de un cuerpo un elemento plano estará sometido a las tensiones normales σ_x y σ_y, así como a la tensión cortante τ_{xy}, como se muestra en la Figura 1.

CRITERIO DE SIGNOS. Para tensiones normales, se considera que las tensiones de tracción son positivas y las de compresión negativas. Para tensiones cortantes, el sentido positivo es el que se representa en la Figura 1.

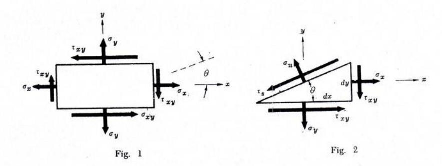


Fig. 1

Fig. 2

TENSIONES EN UN PLANO INCLINADO. Supondremos que las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} son conocidas. (Su determinación se estudiará en el Capítulo 16.) Muchas veces conviene estudiar el estado de tensiones en un plano inclinado un ángulo θ respecto al eje x, como se representa en la Fig. 1. Las tensiones normal y cortante en ese plano se representan por σ_n y τ y aparecen como en la Fig. 2. En el Problema 13 se demuestra que

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

y

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Por esta expresión pueden hallarse σ_n y τ para cada valor de θ. Para aplicaciones, véanse los Problemas 2, 9, 11.

TENSIONES PRINCIPALES. Hay ciertos valores del ángulo θ que hacen sea máximo o mínimo σ_n para un conjunto dado de tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy}. Estos valores máximo y mínimo que puede adoptar σ_n se llaman *tensiones principales* y están dados por

$$(\sigma_n)_{max} = (\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}) + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

y

$$(\sigma_n)_{min} = (\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}) - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

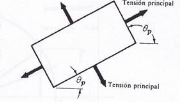
En el Problema 13 se deducen estas expresiones. Para aplicaciones, véanse los Problemas 9, 11, 15, 18.

DIRECCIONES DE LAS TENSIONES PRINCIPALES, PLANOS PRINCIPALES. Los ángulos, designados por θ_p, entre el eje x y los planos en que tienen lugar las tensiones principales, están dados por la ecuación

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{-\tau_{xy}}{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})}$$

También se deduce esta expresión en el Problema 13. Para aplicaciones, véanse los Problemas 9, 11, 15, 18. Como se ve allí, tenemos siempre dos valores de θ_p que satisfacen esa ecuación. La tensión $(\sigma_n)_{max}$ tiene lugar en uno de esos planos, y la $(\sigma_n)_{min}$ en el otro. Los planos definidos por los ángulos θ_p se llaman *planos principales*.

TENSIONES CORTANTES EN LOS PLANOS PRINCIPALES. En el Problema 13 se demuestra que las tensiones cortantes en los planos en los que se producen $(\sigma_n)_{max}$ y $(\sigma_n)_{min}$ son siempre nulas, para cualquier valor de σ_x, σ_y y τ_{xy}. Así, pues, un elemento orientado según los planos principales y sometido a las tensiones principales aparece como en el diagrama adjunto.



TENSION CORTANTE MAXIMA. Hay ciertos valores del ángulo θ que hacen sea máximo τ para un conjunto dado de tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy}. El valor máximo de la tensión cortante está dado por

$$\tau = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

En el Problema 13 se deduce esta expresión. Para aplicaciones, véanse los problemas 3, 9, 11, 15, 18.

DIRECCIONES DE LA TENSION CORTANTE MAXIMA. Los ángulos θ_c entre el eje x y los planos en los que se producen las tensiones cortantes máximas están dados por la ecuación

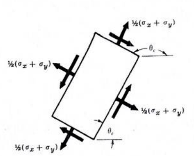
$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})}{\tau_{xy}}$$

Esta expresión se deduce también en el Problema 13. Para aplicaciones, véanse los Problemas 3, 9, 11, 15, 18. Siempre hay dos valores de θ_c que satisfacen esa ecuación. La tensión cortante correspondiente a la raíz cuadrada positiva de la fórmula de más arriba se produce en uno de los planos representados por θ_c, y las que corresponden a la raíz negativa, en el otro.

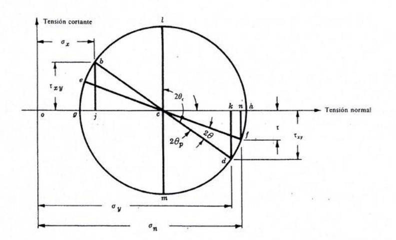
TENSIONES NORMALES EN LOS PLANOS DE MAXIMA TENSION CORTANTE. En el Problema 13 se demuestra que la tensión normal en cada uno de los planos de máxima tensión cortante (que están separados 90°) está dada por

$$\sigma_n' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Por tanto, un elemento orientado según los planos de máxima tensión cortante aparece como en la figura adjunta. Como aclaración pueden verse los Problemas 9, 11, 15, 18.



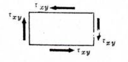
CIRCULO DE MOHR. Todo lo expresado en las ecuaciones anteriores puede representarse gráficamente por el llamado círculo de Mohr. En esta representación se llevan las tensiones normales sobre el eje horizontal y las cortantes en el vertical. Se representan a escala las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} y se traza un círculo por esos puntos, con centro en el eje horizontal. El círculo de Mohr para un elemento sometido al caso general de tensión plana es como sigue:



Para aplicaciones, véanse los Problemas 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16. 17, 19.

CRITERIO DE SIGNOS UTILIZADO CON EL CIRCULO DE MOHR. Se considera que las tensiones de tracción son positivas y las de compresión negativas, por lo que las primeras se repre-

sentan en la figura anterior hacia la derecha del origen y las segundas hacia la izquierda. Con relación a las tensiones cortantes, debe tenerse en cuenta que existe un criterio de signos diferente del que se utiliza en relación con las ecuaciones mencionadas anteriormente. Nos referiremos a un elemento plano sometido a tensiones cortantes que aparece como en la figura adjunta. Diremos que las tensiones cortantes son positivas si tienden a hacer girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj, y negativas si en el contrario. Así, pues, en el elemento de la página anterior, las tensiones cortantes en las caras verticales son positivas, y las de las horizontales, negativas.



DETERMINACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES POR MEDIO DEL CIRCULO DE MOHR. Cuando se ha trazado el círculo de Mohr, las tensiones principales están representadas por los segmentos *og* y *oh*, respectivamente. Se pueden medir a escala o determinar geométricamente en la figura. En el Problema 14 se explica esto en detalle. Para aplicaciones, véanse los Problemas 8, 10, 12, 16, 17, 19.

DETERMINACION DE TENSIONES EN UN PLANO ARBITRARIO POR MEDIO DEL CIRCULO DE MOHR. Para determinar las tensiones normal y cortante en un plano inclinado que forma un ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje x, medimos un ángulo igual a 2θ en el sentido mencionado, desde el diámetro *bd* del círculo de Mohr. Los extremos de este diámetro *bd* representan las condiciones de tensión en las direcciones x-y originales, esto es, las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy}. El ángulo 2θ corresponde al diámetro *ef*. Las coordenadas del punto *f* representan las tensiones normal y cortante en el plano que forma un ángulo θ con el eje x. Esto es, la tensión normal σ_n viene representada por la abscisa *on* y la cortante por la ordenada *nf*. Se estudiará en detalle en el Problema 14. Para aplicaciones, véanse los Problemas 4, 5, 6, 8, 14, 17.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Consideremos una barra recta de sección uniforme sometida a tracción axial. Determinar la intensidad de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje de la barra. Determinar, además, la magnitud y dirección de la tensión cortante máxima en la barra.

Se trata del mismo cuerpo elástico que se consideró en el Capítulo 1, pero las tensiones consideradas allí eran tensiones normales en la dirección de la fuerza axial que actúa en la barra. En la Fig. (*a*), *P* representa la fuerza axial, *A* el área de la sección perpendicular al eje de la barra y, según el Capítulo 1, la tensión normal σ está dada por $\sigma = P/A$.

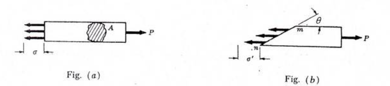


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Supongamos ahora que en lugar de cortar por el plano de antes, perpendicular al eje de la barra, lo hacemos por el que forma un ángulo θ con dicho eje. En la Fig. (*b*) se representa ese plano *m-n*. Como seguimos teniendo que tener la barra en equilibrio en la dirección horizontal, habrá evidentemente tensiones horizontales repartidas

sobre este plano inclinado, como se muestra en la figura. Expresemos la magnitud de estas tensiones por σ'. Evidentemente, el área de la sección inclinada es $A/\text{sen}\ \sigma$ y, para que haya equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal, tenemos

$$\sigma'(A/\text{sen}\ \theta) = P \quad \text{y} \quad \sigma' = (P\ \text{sen}\ \theta)/A$$

Consideremos, en el esquema adjunto, un vector de tensión σ' y descompongámosle en dos componentes, una normal al plano inclinado *mn* y la otra tangencial a él. Representaremos la primera de esas componentes por σ_n, que indicará la tensión normal, y la segunda, que es una tensión cortante, por τ.

Como el ángulo entre σ' y τ es θ, tenemos las relaciones

$$\tau = \sigma' \cos\theta \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sigma'\ \text{sen}\ \theta$$

Pero $\sigma' = (P\ \text{sen}\ \theta)/A$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones anteriores, tenemos

$$\tau = P\ \text{sen}\ \theta \cos\theta/A \quad \text{y} \quad \sigma_n = P\ \text{sen}^2\ \theta/A$$

Pero $\sigma = P/A$, por lo que podemos escribir

$$\tau = \sigma\ \text{sen}\ \theta \cos\theta \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sigma\ \text{sen}^2\ \theta$$

Y, utilizando las expresiones trigonométricas bien conocidas,

$$\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta \cos\theta \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\ \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$$

podemos escribir

(1) $$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma\ \text{sen}\ 2\theta$$

(2) $$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma(1 - \cos 2\theta)$$

Estas expresiones dan las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje de la barra.

De estas ecuaciones resulta evidente que la tensión cortante es máxima cuando sen 2θ adopta el valor máximo unidad, esto es, cuando $2\theta = 90°$ o $\theta = 45°$. El valor de esta tensión cortante máxima es, evidentemente, $\tau = \frac{1}{2}\sigma$. La tensión normal es máxima cuando cos 2θ adopta su valor mínimo -1, esto es, cuando $2\theta = 180°$ o $\theta = 90°$. Para este valor de θ, la tensión normal vale $\sigma_n = \sigma$. Por consiguiente, la tensión normal máxima actúa en las secciones perpendiculares al eje de la barra.

Tenemos así la interesante conclusión de que la tensión cortante máxima en una barra cargada axialmente tiene lugar en los planos a 45° con la dirección de la carga, y, además, en estos planos el valor de esa tensión cortante máxima es $\tau = \frac{1}{2}\sigma$, esto es, que la máxima tensión cortante es la mitad de la tensión normal máxima.

2. Una barra de 8 cm² de sección está sometida a fuerzas axiales de tracción de 7.000 kg aplicadas en los extremos. Determinar las tensiones normal y cortante en un plano inclinado 30° con la dirección de la carga.

Según el Problema 1, la tensión normal en una sección perpendicular al eje de la barra es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{7.000}{8} = 880\ \text{kg cm}^2$$

La tensión normal en un plano que forma un ángulo θ con la dirección de la carga es, según se vio en el Problema 1, $\sigma_n = \frac{1}{2}\sigma(1 - \cos 2\theta)$ que para $\theta = 30°$ se convierte en

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(880)(1 - \cos 60°) = 220\ \text{kg/cm}^2$$

En el Problema 1 se halló que la tensión cortante en un plano que forma un ángulo θ con la dirección de la carca es $\tau = \frac{1}{2}\sigma$ sen 2θ. Para $\theta = 30°$ esta expresión es

$$\tau = \tfrac{1}{2}(880)\ \text{sen}\ 60° = 380\ \text{kg/cm}^2$$

Estas tensiones pueden representarse junto con la carga axial de 7.000 kg en el diagrama de la página anterior, como puede verse.

3. Determinar la tensión cortante máxima en la barra cargada axialmente del Problema 2.

La tensión cortante en un plano que forma un ángulo θ con la dirección de la carga, según se vio en el Problema 1, es $\tau = \frac{1}{2}\sigma$ sen 2θ. Este valor es máximo cuando $2\theta = 90°$, o sea, $\theta = 45°$. Para esta carga tenemos $\sigma = 880$ kg/cm², y cuando $\theta = 45°$ la tensión cortante es

$$\tau = \tfrac{1}{2}(880) \text{ sen } 90° = 440 \text{ kg/cm}^2$$

Esto es, la tensión cortante máxima es igual a la mitad de la máxima tensión normal.

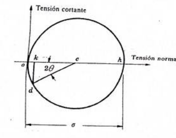
La tensión normal en este plano a 45° se puede hallar por la expresión

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma(1 - \cos 2\theta) = \tfrac{1}{2}(880)(1 - \cos 90°) = 440 \text{ kg/cm}^2$$

4. Estudiar una representación gráfica para las ecuaciones (*1*) y (*2*) del Problema 1.

De acuerdo con esas ecuaciones, las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con la dirección de la carga están dadas por

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma(1 - \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \tau = \tfrac{1}{2}\sigma \text{ sen } 2\theta$$

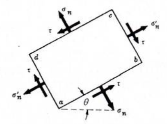


Para representar esas relaciones gráficamente es costumbre introducir un sistema cartesiano rectangular de coordenadas, tomando las tensiones normales como abscisas y las cortantes como ordenadas.

Primero dibujaremos a una escala apropiada la tensión normal σ (considerándola tracción) en el eje horizontal positivo. Con centro en el punto medio c de este segmento del diagrama, trazaremos un círculo con diámetro igual a σ. El radio oc, ch y cd es igual a $\frac{1}{2}\sigma$. El ángulo 2θ es positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj, medido desde el radio oc. De la figura anterior se deducen inmediatamente las relaciones

$$kd = \tau = \tfrac{1}{2}\sigma \text{ sen } 2\theta, \qquad ok = oc - kc = \tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{2}\sigma \cos 2\theta = \sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma(1 - \cos 2\theta)$$

Hay que observar que las escalas utilizadas en las direcciones horizontal y vertical son iguales.



Por tanto, la abscisa del punto d representa la tensión normal y la ordenada la tensión cortante en un plano que forma un ángulo θ con el eje de la barra sometida a tracción. Para trazar este gráfico se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión. Volvamos al Problema 1 y examinemos un esquema de cuerpo en libertad de un elemento extraído de la superficie de la sección inclinada, en el que actúan las tensiones σ_n y τ, tal como el dibujado a la derecha. Consideraremos que las tensiones cortantes son positivas si tienden a hacer girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj, y negativas si en el contrario. Este criterio de signos se usa solo en esta representación gráfica, no en el estudio teórico del Problema 1. Como las tensiones cortantes que se hallaron en el Problema 1 eran en realidad las que actúan en la cara dc del elemento anterior, deben considerarse como negativas. Por ello, en el diagrama circular de más arriba que representa las tensiones normal y cortante, la tensión cortante en el plano dc está representada por una ordenada kd en sentido negativo.

Este diagrama, llamado círculo de Mohr, fue presentado por primera vez por O. Mohr en 1882. Representa la variación de las tensiones normal y cortante en todos los planos inclinados que pasan por un punto dado del cuerpo. Es una representación de las ecuaciones (*1*) y (*2*) del Problema 1, muy útil.

5. Considerar nuevamente la barra cargada axialmente del Problema 2. Utilizar el círculo de Mohr para determinar las tensiones normal y cortante en el plano a 30°.

Se representa, a una escala apropiada, la tensión normal de 880 kg/cm² en el eje horizontal y se traza un círculo con esta recta como diámetro. Se mide el ángulo $2\theta = 2(30°) = 60°$ desde *oc* en sentido contrario a las agujas del reloj.

Las coordenadas del punto *d* son

Tensión cortante
Tensión normal
o k c h
60°
d
880 kg/cm²

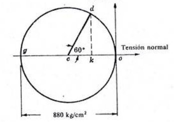
$$kd = \tau = -\tfrac{1}{2}(880) \text{ sen } 60° = -380 \text{ kg/cm}^2$$

y

$$ok = \sigma_n = oc - kc = \tfrac{1}{2}(880) - \tfrac{1}{2}(880) \cos 60° = 220 \text{ kg/cm}^2$$

El signo menos que acompaña al valor de la tensión cortante indica que dicha tensión en este plano a 30° tiende a hacer girar a un elemento limitado por él, en el sentido contrario a las agujas del reloj, lo qué está de acuerdo con el sentido que se vio en el Problema 2.

6. Sobre una barra de 8 cm² de sección actúan fuerzas de compresión axial de 7.000 kg, aplicadas en los extremos de la misma. Hallar, utilizando el círculo de Mohr, las tensiones normal y cortante en un plano inclinado 30° con la dirección de la carga. Despreciar la posibilidad de pandeo en la barra.



La tensión normal en una sección perpendicular al eje de la barra es

$$\sigma = P/A = -7.000/8 = -880 \text{ kg/cm}^2$$

Primero llevaremos esta tensión normal, a una escala apropiada al extremo negativo del eje horizontal. Con centro en el punto medio *c* de este segmento, trazaremos un círculo con diámetro 880 kg/cm² a la escala elegida.

Desde *co* se mide el ángulo $2\theta = 2(30°) = 60°$ con vértice en *c*, en sentido contrario a las agujas del reloj. La abscisa del punto *d* representa la tensión normal y la ordenada la cortante, en el plano a 30° que se estudia. Las coordenadas del punto *d* son

$$kd = \tau = \tfrac{1}{2}(880) \text{ sen } 60° = 380 \text{ kg/cm}^2$$

y

$$ok = \sigma_n = oc - ck = \tfrac{1}{2}(880) - \tfrac{1}{2}(880) \cos 60 = 220 \text{ kg/cm}^2$$

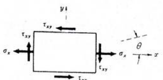
Hay que observar que el segmento *ok* está a la izquierda del origen de coordenadas, por lo que esta tensión normal es de compresión.

El signo más que acompaña a la tensión cortante indica que esta tensión en el plano a 30° tiende a hacer girar a un elemento (representado por líneas de trazos) limitado por él, en el sentido de las agujas del reloj. En el diagrama adjunto se han representado las direcciones de las tensiones normal y cortante, junto con la carga axial de 7.000 kg.



7. Considerar un elemento plano extraído de un cuerpo elástico sometido a tensiones, que soporta las tensiones normal

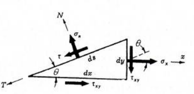
y cortante σ_x y τ_{xy}, respectivamente, como se indica en la figura adjunta. Determinar (*a*) las intensidades de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con la tensión normal σ_x. (*b*) Los valores máximo y mínimo de la tensión normal que pueden existir en planos inclinados, y sus direcciones. (*c*) La magnitud y dirección de la tensión cortante máxima que puede existir en un plano inclinado.



(*a*) Las tensiones normal y cortante en un plano inclinado, que tratamos de hallar, son valores internos respecto al elemento representado arriba. Seguiremos el procedimiento habitual de cortar este elemento por un plano, de modo que dichas tensiones sean exteriores al nuevo cuerpo, esto es, cortaremos el elemento originalmente rectangular por un plano inclinado un ángulo θ respecto al eje x, obteniendo así el elemento triangular dibujado más abajo. Las tensiones normal y cortante, que designamos por σ_n y τ, respectivamente, representan el efecto de la parte restante del bloque primitivo rectangular, que se ha suprimido. Por consiguiente, el problema se reduce a hallar las tensiones σ_n y τ desconocidas en función de las conocidas σ_x y τ_{xy}. Hay que observar que en el esquema de cuerpo en libertad del elemento triangular los vectores indican tensiones que actúan en las diversas caras, y no fuerzas. Se supone que cada una de esas tensiones está uniformemente repartida en la superficie en que actúa. El espesor del elemento, perpendicularmente al plano del papel, se representa por t.

Introduzcamos los ejes N y T, normal y tangente al plano inclinado, como se ve en la figura adjunta. Sumaremos, primero, las fuerzas en la dirección N. Para que exista equilibrio, tenemos

$$\Sigma F_N = \sigma_n t\, ds - \sigma_x t\, dy \operatorname{sen}\theta - \tau_{xy} t\, dy \cos\theta - \tau_{xy} t\, dx \operatorname{sen}\theta = 0$$



Pero, por trigonometría, $dy = ds \operatorname{sen}\theta$, $dx = ds \cos\theta$. Sustituyendo estas relaciones en la ecuación de equilibrio de más arriba, hallamos

$$\sigma_n(ds) = \sigma_x(ds) \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy}(ds) \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

Ahora, utilizando las identidades $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, obtenemos

(*1*) $$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x(1 - \cos 2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

La tensión normal σ_n en cualquier plano inclinado un ángulo θ con el eje x viene dada así como función de σ_x, τ_{xy} y θ.

A continuación consideraremos el equilibrio de las fuerzas que actúan en el elemento triangular en la dirección T, lo que nos da la ecuación

$$\Sigma F_T = \tau\, t\, ds - \sigma_x\, t\, dy \cos\theta + \tau_{xy}\, t\, dy \operatorname{sen}\theta - \tau_{xy}\, t\, dx \cos\theta = 0$$

Sustituyendo $dy = ds \operatorname{sen}\theta$ y $dx = ds \cos\theta$, se obtiene

$$\tau(ds) = +\sigma_x(ds) \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \tau_{xy}(ds) \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy}(ds) \cos^2\theta$$

Y teniendo en cuenta las identidades $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, la expresión anterior se transforma en

(*2*) $$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

La tensión cortante τ en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x viene expresada así en función de σ_x, τ_{xy} y θ.

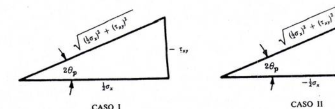
(*b*) Para determinar los valores máximos que puede adoptar la tensión normal σ_n cuando varía el ángulo θ derivaremos la ecuación (*1*) con respecto a θ y haremos la derivada igual a cero. Así,

$$\frac{d(\sigma_n)}{d\theta} = +\sigma_x \operatorname{sen} 2\theta + 2\, \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Por consiguiente, los valores de θ que producen los máximos y mínimos de la tensión normal son

(*3*) $$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\sigma_x}$$

Los planos definidos por los ángulos θ_p se llaman *planos principales*. A las tensiones normales en estos planos se les designa *tensiones principales*. Son los valores máximo y mínimo que pueden adoptar las tensiones normales en el elemento considerado. Se pueden hallar fácilmente considerando la interpretación gráfica que sigue de la ecuación (*3*):



Evidentemente, la tangente de cada uno de estos triángulos designados por $2\theta_p$ tiene el valor dado por la ecuación (*3*), por lo que hay dos soluciones de dicha ecuación y, por consiguiente, de $2\theta_p$ (que difieren en 180°), así como dos valores de θ_p que difieren en 90°. Debe observarse que los dos diagramas de arriba no tienen relación directa con el elemento triangular cuyo esquema de cuerpo en libertad se consideró antes.

Ahora podemos sustituir los valores de sen $2\theta_p$ y cos $2\theta_p$ obtenidos en los dos diagramas de arriba, en la ecuación (*1*), para hallar los valores máximo y mínimo de la tensión normal. Observando que

$$\text{sen } 2\theta_p = \frac{\mp\tau_{xy}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}}, \qquad \cos 2\theta_p = \frac{\pm\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

donde los signos de arriba corresponden al caso I y los de abajo al II, obtenemos la ecuación (*1*)

(*4*)
$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x \mp (\tfrac{1}{2}\sigma_x)\frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} \mp \frac{(\tau_{xy})^2}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} = \tfrac{1}{2}\sigma_x \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

La tensión normal máxima es

(*5*)
$$(\sigma_n)_{\max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

La tensión normal mínima es

(*6*)
$$(\sigma_n)_{\min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Las tensiones dadas por las ecuaciones (*5*) y (*6*) son las tensiones principales y tienen lugar en los planos principales definidos por la ecuación (*3*). Sustituyendo uno de los valores de θ_p de la ecuación (*3*) en (*1*) se puede determinar fácilmente cuál de las dos tensiones principales actúa en ese plano. La otra actúa, naturalmente, en el otro plano principal.

Sustituyendo los valores de los ángulos $2\theta_p$ dados por la ecuación (*3*) y los dos diagramas de arriba en la ecuación (*2*), se ve inmediatamente que las tensiones cortantes τ en los planos principales son nulas.

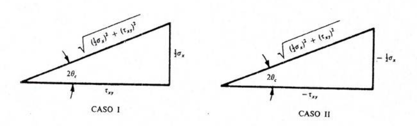
(*c*) Para determinar el valor máximo que puede adoptar la tensión cortante τ cuando varía el ángulo θ, derivaremos la ecuación (*2*) respecto a θ y haremos su derivada igual a cero. Así, tendremos

$$\frac{d(\tau)}{d\theta} = \sigma_x \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \text{ sen } 2\theta = 0$$

Los valores de θ que producen los máximos de la tensión cortante son, por consiguiente,

(*7*)
$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Los planos definidos por las dos soluciones de esta ecuación son los de máxima tensión cortante. También ahora resulta conveniente dar una interpretación gráfica de la ecuación (7). Los dos valores del ángulo $2\theta_c$ que la satisfacen se pueden representar como sigue:



De estos diagramas se obtiene

$$\operatorname{sen} 2\theta_c = \frac{\pm\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}}, \qquad \cos 2\theta_c = \frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

donde los signos de más arriba (positivos) corresponden al caso I y los de abajo (negativos) se aplican al II. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2), obtenemos

(8) $$\tau = (\tfrac{1}{2}\sigma_x)\frac{\pm\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} + (\tau_{xy})\frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

El signo positivo representa la tensión cortante máxima, y el negativo la mínima.

Si comparamos las ecuaciones (3) y (7) resulta evidente que los ángulos $2\theta_p$ y $2\theta_c$ difieren en 90°, pues sus tangentes son números recíprocos y de signo contrario. Por tanto, los planos definidos por los ángulos θ_p y θ_c difieren entre sí en 45°; esto es, los planos de tensión cortante máxima están orientados a 45° de los de máxima tensión normal.

Es interesante también determinar las tensiones normales en los planos de tensión cortante máxima. Dichos planos están definidos por la ecuación (7). Si sustituimos esos valores de sen $2\theta_c$ y cos $2\theta_c$ en la ecuación (1) de la tensión normal, hallamos

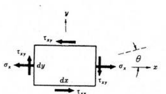
(9) $$\sigma_n' = \tfrac{1}{2}\sigma_x - (\tfrac{1}{2}\sigma_x)\frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} + (\tau_{xy})\frac{\pm\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} = \tfrac{1}{2}\sigma_x$$

Por tanto, en cada uno de los planos de tensión cortante máxima tenemos una tensión normal de magnitud $\frac{1}{2}\sigma_x$.

8. Estudiar una representación gráfica del estudio realizado en el Problema 7

Para valores dados de σ_x y τ_{xy}, procederemos como sigue:

(a) Adoptaremos un sistema ortogonal de coordenadas en el que las tensiones normales se representen en el eje horizontal, y las cortantes en el vertical. Las escalas serán iguales en ambos ejes.



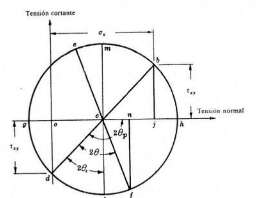
(b) Con referencia al elemento rectangular original considerado en el Problema 7 y reproducido aquí, introduciremos el criterio de signos que considera positivas las tensiones cortantes si

tienden a hacer girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj, y negativas si en el contrario. Aquí, las tensiones cortantes en las caras verticales son positivas, y las de las horizontales negativas. Además, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión.

(*c*) Situamos primero el punto *b*, tomando σ_x y τ_{xy} con los valores dados. La tensión cortante τ_{xy} en las caras verticales en las que actúa σ_x es positiva, por lo que se toma como positiva en el diagrama adjunto, trazado en la hipótesis de ser σ_x una tracción, aunque el método seguido es también válido si se trata de compresión.

(*d*) Ahora situamos el punto *d* de un modo análogo, tomando τ_{xy} del lado negativo del eje vertical. En realidad, este punto *d* corresponde a las tensiones cortantes negativas τ_{xy} que existen en las caras horizontales del elemento junto con un valor nulo de la tensión normal que actúa en esas mismas caras.

(*e*) Ahora, trazamos la recta *bd*, hallamos su punto medio *c* y trazamos un círculo con centro en *c* y radio *cb*. Es el llamado círculo de Mohr.



Primero demostraremos que los puntos *g* y *h* del diámetro horizontal del círculo representan las tensiones principales. Para ello, observamos que el punto *c* está a la distancia $\frac{1}{2}\sigma_x$ del origen de coordenadas. Por las relaciones del triángulo rectángulo, tenemos

$$(cd)^2 = (oc)^2 + (od)^2 \qquad \text{y} \qquad cd = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Además, $cd = ch = cg$, por lo que la coordenada *x* del punto *h* es $(oc + ch)$ o

$$\tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Pero esta expresión es precisamente la tensión principal máxima, dada por la ecuación (*5*) del Problema 7. Del mismo modo, la coordenada *x* del punto *g* es $(oc - cg)$; pero esta cantidad es negativa, por lo que *og* está a la izquierda del origen y el punto *g* representa una tensión de compresión. Esta tensión es

$$\tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Pero esta expresión es precisamente la tensión principal mínima dada por la ecuación (*6*) del Problema 7. Por consiguiente, los puntos *g* y *h* representan las tensiones principales que existen en el elemento original. Vemos que la tangente del $\angle\, ocd = \tau_{xy}/(\frac{1}{2}\sigma_x)$. Pero, según la ecuación (*3*) del Problema 7, $\operatorname{tg} 2\theta_p = -\tau_{xy}/(\frac{1}{2}\sigma_x)$, y comparando estas dos expresiones vemos que $\angle\, hcd = 2\theta_p$, pues $\operatorname{tg}(180° - \theta) = -\operatorname{tg}\theta$. Así, pues, un giro en sentido contrario a las agujas del reloj del diámetro *bd* (correspondiente a las tensiones en las direcciones *x-y*) nos conduce al diámetro *gh*, que representa los planos principales en los que se producen las tensiones principales. Los planos principales forman un ángulo θ_p con la dirección *x*.

El círculo de Mohr es, pues, un instrumento útil para hallar las tensiones principales, pues basta con construir el círculo para un conjunto dado de tensiones σ_x y τ_{xy} y medir *og* y *oh*. Estas abscisas representan las tensiones principales a la misma escala que se tomaron σ_x y τ_{xy}.

Resulta evidente que el radio del círculo de Mohr, representado por *cd*, donde $cd = \sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$, corresponde a la tensión cortante máxima, dada por la ecuación (*8*) del Problema 7. En realidad, la tensión cortante en un plano cualquiera está representada por la ordenada del círculo de Mohr, por lo que los radios *cl* y *cm* son la representación de las tensiones cortantes máximas. El ángulo *dcl* es, indudablemente, $2\theta_c$, por lo que resulta evidente que el doble del ángulo entre los planos de tensión normal máxima y los de tensión cortante máxima

($\angle$ *lch*) es 90°; por tanto, los planos de tensión cortante máxima están separados 45° de los de máxima tensión normal.

Evidentemente, los extremos del diámetro *bd* representan las tensiones que actúan en las direcciones originales *x* e *y*. Ahora demostraremos que los extremos de cualquier otro diámetro, tal como *ef* (con un ángulo cualquiera 2θ con *bd*), representan las tensiones en un plano inclinado un ángulo θ con el eje *x*. Para ello observaremos que la abscisa del punto *f* está dada por

$$\begin{aligned}\sigma_n = oc + cn &= \tfrac{1}{2}\sigma_x + (cf)\cos(2\theta_p - 2\theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\sigma_x + (cf)(\cos 2\theta_p \cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta_p \operatorname{sen} 2\theta)\\ &= \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}\,(\cos 2\theta_p \cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta_p \operatorname{sen} 2\theta)\end{aligned}$$

Pero de la observación del triángulo *cod* que aparece en el círculo de Mohr, resulta evidente que

$$(1) \qquad \operatorname{sen} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta_p = \frac{-\frac{1}{2}\sigma_x}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sigma_x)_2 + (\tau_{xy})^2}}$$

Sustituyendo los valores de τ_{xy} y $\frac{1}{2}\sigma_x$ de estas dos ecuaciones en la anterior, hallamos

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

Pero esta expresión es precisamente la tensión normal en un plano inclinado un ángulo θ con el eje *x*, como se dedujo en la ecuación (*1*) del Problema 7.

Ahora observamos que la ordenada del punto *f* está dada por

$$\begin{aligned}\tau = nf = (cf)\operatorname{sen}(2\theta_p - 2\theta)\\ = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}\,(\operatorname{sen} 2\theta_p \cos 2\theta - \cos 2\theta_p \operatorname{sen} 2\theta)\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de τ_{xy} y $\frac{1}{2}\sigma_x$ de las ecuaciones (*1*) en ésta, tenemos

$$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Pero ésta es la tensión cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje *x* deducida en la ecuación (*2*) del Problema 7.

Por tanto, las coordenadas del punto *f* del círculo de Mohr representan las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje *x*.

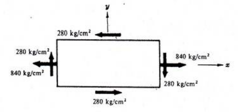
9. Un elemento plano de un cuerpo está sometido a una tensión normal en la dirección *x* de 840 kg/cm² y a una tensión cortante de 280 kg/cm², como se indica en la figura. Determinar: (*a*) las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo de 30° con la tensión normal. (*b*) Los valores máximo y mínimo de la tensión normal que pueden existir en planos inclinados y las direcciones de esas tensiones. (*c*) La magnitud y dirección de la tensión cortante máxima que puede existir en un plano inclinado.

(*a*) De acuerdo con la notación del Problema 7, tenemos $\sigma_x = 840$ kg/cm² y $\tau_{xy} = 280$ kg/cm². De la ecuación (*1*) del Problema 7 se ve que la tensión normal en un plano inclinado un ángulo θ con el eje *x* está dada por

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

Sustituyendo los anteriores valores de σ_x y τ_{xy} cuando $\theta = 30°$, esta expresión se convierte en

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \tfrac{1}{2}(840) - \tfrac{1}{2}(840)\cos 60° + 280 \operatorname{sen} 60°\\ &= 450 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$



Según la ecuación (2) del Problema 7, la tensión cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x está dada por

$$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Sustituyendo los valores anteriores de σ_x y τ_{xy}, cuando $\theta = 30°$, se convierte en

$$\tau = \tfrac{1}{2}(840) \text{ sen } 60° + 280 \cos 60° = 363 + 140 = 503 \text{ kg/cm}^2$$

Las direcciones positivas de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado son las representadas en el segundo esquema del Problema 7. De acuerdo con este criterio de signos, las tensiones en un plano a 30° aparecen como en la figura adjunta.

450 kg/cm²
503 kg/cm²
840 kg/cm²
280 kg/cm²
30°
280 kg/cm²

(*b*) En las ecuaciones (*5*) y (*6*) del Problema 7 se dieron los valores de las tensiones principales, esto es, los valores máximo y mínimo de las tensiones normales que existen en ese elemento. De la ecuación (*5*) de la tensión normal máxima, tenemos

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 420 + \sqrt{(420)^2 + (280)^2} = 925 \text{ kg/cm}^2$$

De la ecuación (*6*) tenemos para la tensión normal mínima

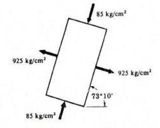
$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 420 - \sqrt{(420)^2 + (280)^2} = -85 \text{ kg/cm}^2$$

En la ecuación (*3*) del Problema 7 se halló que las direcciones de los planos en que se producen esas tensiones principales son

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{280}{420} = -\frac{2}{3}$$

Como la tangente del ángulo $2\theta_p$ es negativa, los dos valores de $2\theta_p$ están en el segundo y el cuarto cuadrantes. En el segundo, $2\theta_p = 146°20'$; en el cuarto, $2\theta_p' = 326°20'$. Por consiguiente, tenemos los planos principales definidos por $\theta_p = 73°10'$ y $\theta_p' = 163°10'$. Si sustituimos, ahora, $\theta_p = 73°10'$ junto con los valores dados de σ_x y τ_{xy} en la ecuación (*1*) del Problema 7, se halla

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta \times \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta \\ &= 420 - 420 \cos 146°20' + 280 \text{ sen } 146°20' \\ &= 420 - 420(-0{,}833) + 280(0{,}554) = 925 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$



Así, pues, se produce la tensión principal de 925 kg/cm² en el plano principal que forma un ángulo de 73°10' con el eje x. Las tensiones principales aparecen, pues, como en el diagrama adjunto. Como se dijo en el Problema 7, las tensiones cortantes en los planos principales son nulas.

(*c*) En la ecuación (*8*) del Problema 7 se vio que los valores de las tensiones cortantes máximas son

$$\tau = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{(420)^2 + (280)^2} = \pm 505 \text{ kg/cm}^2$$

En la Ecuación (*7*) del Problema 7 se halló que las direcciones de los planos en los que tienen lugar estas tensiones cortantes máximas están dadas por

$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{\tfrac{1}{2}\sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{420}{280} = \frac{3}{2}$$

Por consiguiente, los ángulos $2\theta_c$ están en los cuadrantes primero y tercero, pues la tangente es positiva. Así, tenemos $2\theta_c = 56°20'$ y $2\theta_c' = 236°20'$, o sea, $\theta_c = 28°10'$ y $\theta_c' = 118°10'$. En la ecuación (*2*) del Problema 7 se vio que la tensión cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x es

$$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Sustituyendo $\sigma_x = 840$ kg/cm², $\tau_{xy} = 280$ kg/cm² y $\theta = 28°10'$, hallamos

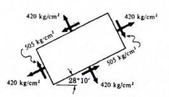
$$\tau = \tfrac{1}{2}(840)\ \text{sen}\ 56°20' + 280\ \cos\ 56°20' = 505\ \text{kg/cm}^2$$

Así, la tensión cortante en el plano a 28°10' es positiva. En el segundo diagrama del Problema 7 se muestra el sentido positivo de las tensiones cortantes.

En la ecuación (9) se vio que las tensiones normales en los planos de cortante máximo son

$$\sigma_n' = \tfrac{1}{2}\sigma_x = \tfrac{1}{2}(840) = 420\ \text{kg/cm}^2$$

Esta tensión normal actúa en cada uno de los planos de tensión cortante máxima, como se ve en la figura adjunta.



10. Un elemento plano está sometido a las tensiones representadas en las Fig. (*a*). Determinar, utilizando el círculo de Mohr, (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que se producen.

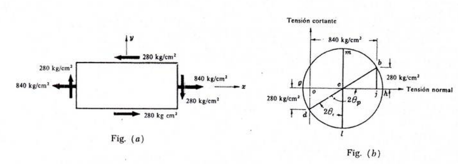


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

En el Problema 8 se describió el procedimiento de trazar el círculo de Mohr. Siguiendo las instrucciones dadas allí, comprobamos que la tensión cortante en las caras verticales del elemento anterior son positivas, mientras que las de las caras horizontales son negativas. Así, el estado de tensiones de $\sigma_x = 840$ kg/cm², $\tau_{xy} = 280$ kg/cm² que existe en las caras verticales del elemento, se representa por el punto *b* de la Fig. (*b*). El correspondiente a $\tau_{xy} = -280$ kg/cm² junto con una tensión normal nula, en las caras horizontales, se representa por el punto *d*. Trazamos la recta *bd*, hallamos su punto medio *c* y dibujamos un círculo de radio $cb = cd$ con centro en *c*. Es el círculo de Mohr. Los extremos del diámetro *bd* representan el estado de tensiones que existe en el elemento si tiene la orientación original representada más arriba.

(*a*) Las tensiones principales están representadas por los puntos *g* y *h*, como se vio en el Problema 8. Puede determinarse su valor midiendo en el diagrama anterior o comprobando que la coordenada de *c* es 420, y que $cd = \sqrt{(420)^2 + (280)^2} = 505$. Por tanto, la tensión principal mínima es

$$(\sigma_n)_{\min} = og = (oc - cg) = 420 - 505 = -85\ \text{kg/cm}^2$$

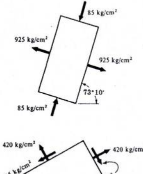
La tensión principal máxima es

$$(\sigma_n)_{\max} = oh = (oc + ch) = 420 + 505 = 925\ \text{kg/cm}^2$$

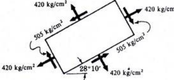
El ángulo $2\theta_p$ descrito antes está dado por

$$\text{tg}\ 2\theta_p = -\frac{280}{420} = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \theta_p = 73\ 10'$$

Se podría haber hallado también este valor, midiendo el $\angle\ dch$ en el círculo de Mohr. Así, se ve fácilmente que la tensión principal, representada por el punto h, actúa en un plano a 73°10′ del eje x. Las tensiones principales aparecen, pues, como en el esquema adjunto. Observando el círculo de Mohr resulta evidente que las tensiones cortantes en esos planos son nulas, pues los puntos g y h están en el eje horizontal del círculo.



(*b*) La tensión cortante máxima está representada en el círculo de Mohr por cl. Ya se ha hallado que este radio es igual a 505 kg/cm². El ángulo $2\theta_c$ se puede hallar o midiendo directamente en el gráfico anterior, o simplemente restando 90° del ángulo $2\theta_p$, que ya se ha determinado. Así se obtiene $2\theta_c$ = 56°20′ y θ_c = 28 °10′. La tensión cortante representada por el punto l, es negativa, pues en este plano a 28°10′ tiende a hacer girar el elemento en sentido contrario a las agujas del reloj. Además, según el círculo de Mohr, la abscisa del punto l es 420 kg/cm², lo que representa la tensión normal en los planos de máxima tensión cortante. Así, pues, estas tensiones aparecen como en la figura adjunta.



11. Un elemento plano de un cuerpo está sometido a una tensión normal de compresión en la dirección x de 840 kg/cm², así como a una tensión cortante de 280 kg/cm² como se indica en la Fig. (*a*). (*a*) Determinar las intensidades de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo de 30° con la tensión normal. (*b*) Determinar los valores máximo y mínimo de la tensión normal que puede existir en planos inclinados, y sus direcciones. (*c*) Hallar la magnitud y dirección de la tensión cortante máxima que puede existir en un plano inclinado.

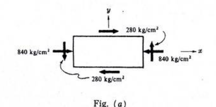


Fig. (*a*)

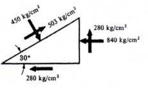


Fig. (*b*)

(*a*) Por el criterio de signos para las tensiones normales y cortantes adoptado en el Problema 7, tenemos aquí $\sigma_x = -840$ kg/cm², $\tau_{xy} = -280$ kg/cm². Según la ecuación (*1*) del Problema 7, la tensión normal en el plano a 30° es

$$\sigma_n = -840/2 - (-840/2)\cos 60° - 280 \text{ sen } 60° = -450 \text{ kg/cm}^2$$

Según la ecuación (*2*) del Problema 7, la tensión cortante en el plano a 30° es

$$\tau = \tfrac{1}{2}(-840) \text{ sen } 60° - 280 \cos 60° = -503 \text{ kg/cm}^2$$

En el segundo diagrama del Problema 7 se muestran las direcciones positivas de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado. Por este criterio de signos, en el plano a 30° aparecen como en la Figura (*b*).

(*b*) En las ecuaciones (*5*) y (*6*) del Problema 7 se dieron los valores de las tensiones principales. Por la ecuación (*5*), tenemos

$$(\sigma_n)_{max} = -840/2 + \sqrt{(-840/2)^2 + (-280)^2} = 85 \text{ kg/cm}^2$$

Por la ecuación (6),

$$(\sigma_n)_{min} = -840/2 - \sqrt{(-840/2)^2 + (-280)^2} = -925 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión principal de tracción se suele llamar máxima, aunque su valor absoluto sea menor que la de compresión.

Las direcciones de los planos en que se producen esas tensiones principales están dadas por la ecuación (3) del Problema 7, y son

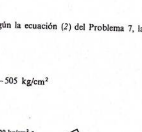
$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{-280}{-840/2} = -\frac{2}{3}$$

Los ángulos definidos por $2\theta_p$ están en el segundo y el cuarto cuadrantes, pues la tangente es negativa. Por tanto, $2\theta_p = 146°20'$ y $2\theta_p' = 326°20'$, y los planos principales están definidos por $\theta_p = 73°10'$ y $\theta_p' = 163°10'$. Si sustituimos, ahora, $\theta_p = 73°10'$ junto con los valores dados de σ_x y τ_{xy} en la ecuación (1) del Problema 7, hallamos

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta = -840/2 - (-840/2) \cos 146°20' - 280 \text{ sen } 146°20'$$

$$= -925 \text{ kg/cm}^2$$

Así, pues, en el plano principal orientado a 73°10′ del eje x se produce la tensión principal de -925 kg/cm², como se indica en el esquema adjunto. Las tensiones cortantes en estos planos principales son nulas.



(c) Los valores de la tensión cortante máxima se hallan por la ecuación (8) del Problema 7, y son

$$\tau = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= \pm\sqrt{(-480/2)^2 + (-280)^2} = \pm 505 \text{ kg/cm}^2$$

En la ecuación (7) del Problema 7 se halló que las direcciones de los planos en que se producen esas tensiones cortantes son

$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{\frac{1}{2}\sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{-840/2}{-280} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, $2\theta_c = 56°20'$ y $2\theta_c' = 236°20'$, y $\theta_c = 28°10'$, $\theta_c' = 118°10'$. Según la ecuación (2) del Problema 7, la tensión cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x es

$$\tau = \tfrac{1}{2}\sigma_x \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(-840) \text{ sen } 56°20' - 280 \cos 56°20' = -505 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión cortante en el plano a 28°10′ es negativa. En el segundo diagrama del Problema 7 se indica el sentido positivo de la tensión cortante.

En el Problema 7, ecuación (9), se vio que las tensiones normales en los planos de la máxima tensión cortante son

$$\sigma_n' = \tfrac{1}{2}\sigma_x = -840/2 = -420 \text{ kg/cm}^2$$

Esta tensión normal actúa en cada uno de los planos de máxima tensión cortante, como se ve en el esquema adjunto.

12. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la Fig. (*a*). Utilizando el círculo de Mohr, determinar (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que se producen.

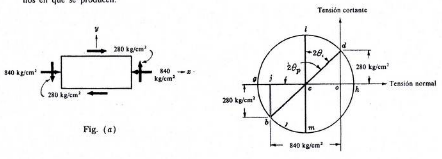


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

En el Problema 8 se describió el método para trazar el círculo de Mohr. Siguiendo las instrucciones dadas allí, las tensiones cortantes en las caras verticales del citado elemento son negativas, y las de las caras horizontales positivas. Así, pues, el estado de tensiones de $\sigma_x = -840$ kg/cm², $\tau_{xy} = -280$ kg/cm² existente en las caras verticales del elemento, se representa por el punto *b* en la Fig. (*b*). El estado correspondiente a $\tau_{xy} = 280$ kg/cm² junto con una tensión normal nula de las caras horizontales se representa por el punto *d*. Trazamos la recta *bd*, hallamos su punto medio *c* y dibujamos un círculo de radio $cb = cd$ con centro *c*. Es el círculo de Mohr. Los extremos del diámetro *bd* representan el estado de tensiones existente en el elemento si tiene la orientación inicial representada más arriba.

Las tensiones principales están representadas por los puntos *g* y *h*, como se demostró en el Problema 8. Se pueden determinar, o midiendo directamente en el diagrama de arriba, o comprobando que la coordenada de *c* es -420, y que $cd = \sqrt{(420)^2 + (280)^2} = 505$ kg/cm². Así, la tensión principal mínima es

$$(\sigma_n)_{min} = og = +(oc + cg) = -420 - 505 = -925 \text{ kg/cm}^2$$

y la máxima

$$(\sigma_n)_{max} = oh = ch - co = 505 - 420 = 85 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo $2\theta_p$ definido antes está dado por $\operatorname{tg} 2\theta_p = -280/420 = -2/3$, pues $\operatorname{tg}(180° - \theta) = -\operatorname{tg} \theta$. Por tanto, $2\theta_p = 146°20'$, $\theta_p = 73°10'$. Este valor podría haberse hallado, indudablemente, midiendo directamente el ángulo *dcg* en el círculo de Mohr. Así, pues, la tensión principal de -925 kg/cm², representada por el punto *g*, actúa en un plano a 73°10′ del eje *x* primitivo. Las tensiones principales aparecen, pues, como en la Fig. (*c*). Del círculo de Mohr resulta evidente que las tensiones cortantes en esos planos son nulas, pues los puntos *g* y *h* están en el eje horizontal del círculo.

85 kg/cm²
925 kg/cm²
925 kg/cm²
73°10′
85 kg/cm²

Fig. (*c*)

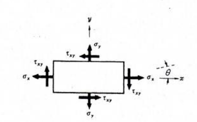
En el círculo de Mohr, la tensión cortante máxima está representada por *cl*. Ya se ha hallado que el radio es igual a 505 kg/cm². El ángulo $2\theta_c$ se puede hallar bien midiendo directamente en el círculo de Mohr o simplemente restando 90° del valor anterior de $2\theta_p$, con lo que se obtiene $\theta_c = 28°10'$. La tensión cortante, representada por el punto *l* es positiva, pues en este plano a 28°10′ dicha tensión tiende a hacer girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj. Además, según el círculo de Mohr, la abscisa del punto *l* es -420 kg/cm², que repre-

420 kg/cm²
420 kg/cm²
505 kg/cm²
505 kg/cm²
420 kg/cm²
420 kg/cm²
28°10′

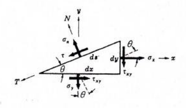
Fig. (*d*)

senta la tensión normal que existe en los planos de máximas tensiones cortantes, como se indica en la Figura (*d*).

13. Considerar un elemento plano extraído de un miembro elástico sometido a tensiones. En general, ese elemento estará sometido a tensiones normales en dos direcciones perpendiculares, así como a tensiones cortantes. Representar estas tensiones por σ_x, σ_y y τ_{xy}, con las direcciones positivas de la figura adjunta. (*a*) Determinar la magnitud de las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x. (*b*) Determinar también los valores máximo y mínimo de la tensión normal que puede existir en planos inclinados, y sus direcciones. (*c*) Finalmente, hallar la magnitud y dirección de la tensión cortante máxima que puede existir en un plano inclinado.



(*a*) Evidentemente, las tensiones buscadas en los planos inclinados son magnitudes interiores con respecto al elemento representado más arriba. Siguiendo el procedimiento habitual de cortar por un plano para hacer estas magnitudes exteriores a la nueva sección, cortaremos el elemento rectangular original por un plano inclinado un ángulo θ con el eje x, obteniendo así el elemento triangular representado en la figura adjunta. Como hemos suprimido la mitad del material del elemento rectangular, debemos sustituirlo por el efecto que ejerce sobre el triángulo inferior que queda, y este efecto consiste, en general, en fuerzas normales y de corte que actúan en el plano inclinado. Designaremos las magnitudes de las tensiones correspondientes a estas fuerzas por σ_n y τ, respectivamente. Así, pues, nuestro problema se reduce a hallar las tensiones desconocidas σ_n y τ en función de las conocidas σ_x, σ_y y τ_{xy}. En el Capítulo 16 se vio la manera de determinar estos últimos valores. Hay que tener muy en cuenta que en el diagrama de la derecha se indican tensiones en las distintas caras, y no fuerzas. Se supone que cada una de esas tensiones está uniformemente repartida en la superficie en que actúa.



Adoptaremos los ejes N y T, normal y tangente al plano inclinado, como se indica. Sea t el espesor del elemento perpendicularmente al plano del papel. Comenzaremos por sumar las fuerzas en la dirección N. Para que exista equilibrio, tenemos

$$\Sigma F_N = \sigma_n\, t\, ds - \sigma_x\, t\, dy \text{ sen } \theta - \tau_{xy}\, t\, dy \cos\theta - \sigma_y\, t\, dx \cos\theta - \tau_{xy}\, t\, dx \text{ sen } \theta = 0$$

Sustituyendo $dy = ds \text{ sen } \theta$, $dx = ds \cos\theta$ en la ecuación de equilibrio,

$$\sigma_n\, ds = \sigma_x\, ds \text{ sen}^2 \theta + \sigma_y\, ds \cos^2\theta + 2\tau_{xy}\, ds \text{ sen } \theta \cos\theta$$

Introduciendo las identidades $\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, $\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos\theta$, hallamos

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x(1 - \cos 2\theta) + \tfrac{1}{2}\sigma_y(1 + \cos 2\theta) + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta \qquad \text{y}$$

$$(1) \qquad \sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

Así tenemos la tensión normal σ_n en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x, en función de σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ.

Ahora, sumando las fuerzas que actúan en el elemento en la dirección T, hallamos,

$$\Sigma F_T = \tau\, t\, ds - \sigma_x\, t\, dy \cos\theta + \tau_{xy}\, t\, dy \text{ sen } \theta - \tau_{xy}\, t\, dx \cos\theta + \sigma_y\, t\, dx \text{ sen } \theta = 0$$

Sustituyendo dx y dy como antes,

$$\tau\, ds = \sigma_x\, ds \text{ sen } \theta \cos\theta - \tau_{xy}\, ds \text{ sen}^2 \theta + \tau_{xy}\, ds \cos^2\theta - \sigma_y\, ds \text{ sen } \theta \cos\theta$$

Introduciendo las identidades anteriores y la relación $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, esta última ecuación se transforma en

(2) $$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Así tenemos la tensión cortante τ en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x, en función de σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ.

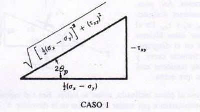
(*b*) Para determinar el valor máximo que puede adoptar la tensión normal cuando varía el ángulo θ, derivaremos la ecuación (*1*) respecto a θ y haremos el resultado igual a cero. Así,

$$d(\sigma_n)/d\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

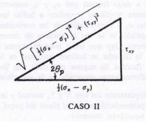
Por tanto, los valores de θ que dan origen a los valores máximo y mínimo de la tensión normal están dados por

(3) $$\operatorname{tg} 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Los planos definidos por θ_p se llaman *planos principales*. Las tensiones normales que existen en esos planos se designan por *tensiones principales*. Son los valores máximo y mínimo que puede adoptar la tensión normal en el elemento considerado. Se pueden hallar fácilmente estos valores considerando la interpretación gráfica de la ecuación (*3*) siguiente:



CASO I



CASO II

Evidentemente, la tangente de cada uno de los ángulos designados por $2\theta_p$ tiene el valor dado en la ecuación (*3*), por lo que esta ecuación tiene dos soluciones y, por consiguiente, hay dos valores de $2\theta_p$ (que difieren en 180°) y dos de θ_p (que difieren en 90°). Hay que observar que los dos diagramas anteriores no tienen relación directa con el elemento triangular cuyo esquema de cuerpo en libertad se consideró antes.

Ahora podemos sustituir los valores de $\operatorname{sen} 2\theta_p$ y $\cos 2\theta_p$, que se hallan en los diagramas anteriores, en la ecuación (*1*) para hallar el máximo y el mínimo de las tensiones normales. Observando que

$$\operatorname{sen} 2\theta_p = \frac{\mp\tau_{xy}}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}}, \qquad \cos 2\theta_p = \frac{\pm\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

donde los signos de arriba corresponden al caso I y los de abajo al caso II, obtenemos de (*1*)

(4) $$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

La tensión normal máxima es

(5) $$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Y la mínima

(6) $$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Las tensiones dadas por las ecuaciones *(5)* y *(6)* son las tensiones principales y se producen en los planos principales definidos por la ecuación *(3)*. Sustituyendo uno de los valores de θ_p obtenidos en *(3)* en la ecuación *(1)*, se puede determinar fácilmente cuál de las dos tensiones principales actúa en ese plano. La otra actúa, naturalmente, en el otro.

Sustituyendo los valores del ángulo $2\theta_p$ dados por la ecuación *(3)* y los dos diagramas anteriores que representan las funciones seno y coseno en la ecuación *(2)*, se ve fácilmente que las tensiones cortantes τ en los planos principales son nulas.

(c) Para determinar el valor máximo que puede adoptar la tensión cortante τ cuando varía el ángulo θ, derivaremos la ecuación *(2)* respecto a θ e igualaremos a cero el resultado. Así,

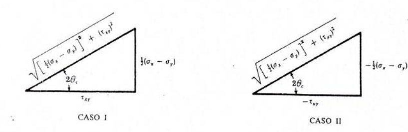
$$d(\tau)/d\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = 0$$

Los valores de θ que originan los máximos de la tensión cortante son, pues,

(7) $$\text{tg}\,2\theta_c = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)/\tau_{xy}$$

Los planos definidos por las dos soluciones de esta ecuación son los de máxima tensión cortante.

De nuevo, es interesante interpretar gráficamente la ecuación *(7)*. Los dos valores del ángulo $2\theta_c$ que satisfacen esta ecuación se pueden representar como sigue:



De estos diagramas, tenemos

$$\text{sen}\,2\theta_c = \frac{\pm\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}} \qquad \cos 2\theta_c = \frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

donde los signos de arriba (positivos) se refieren al caso I y los de abajo (negativos) al II. Sustituyendo estos valores en la ecuación *(2)*, hallamos

(8) $$\tau = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Aquí, el signo más corresponde a la tensión cortante máxima, y el menos a la mínima.

Si comparamos las ecuaciones *(3)* y *(7)* resulta evidente que los ángulos $2\theta_p$ y $2\theta_c$ difieren en 90°, pues sus tangentes son recíprocas y de signo contrario. Por tanto, los planos definidos por θ_p y θ_c difieren en 45°, esto es, los planos de máxima tensión cortante están separados 45° respecto a los de tensión normal máxima.

Es interesante, también, determinar las tensiones normales en los planos de máxima tensión cortante. Estos planos están definidos por la ecuación *(7)*. Si sustituimos esos valores de sen $2\theta_c$ y cos $2\theta_c$ en la ecuación *(1)* de la tensión normal, hallamos

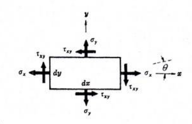
(9) $$\sigma_n' = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

En cada uno de los planos de máxima tensión cortante existe una tensión normal de magnitud $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$.

14. Hallar una representación gráfica del estudio realizado en el Problema 12.

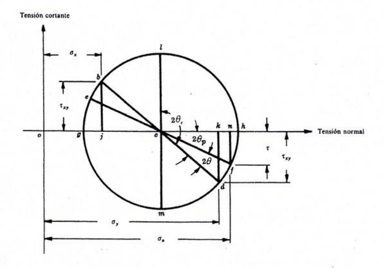
Para valores dados de σ_x, σ_y y τ_{xy}, procederemos como sigue:

(*a*) Adoptaremos un sistema ortogonal de coordenadas, en el que las tensiones normales se representan en el eje horizontal y las cortantes en el vertical. Las escalas utilizadas en ambos ejes han de ser iguales.



(*b*) Con referencia al elemento rectangular original considerado en el Problema 13 y reproducido en la figura adjunta, introduciremos el criterio de signos que considera positivas las tensiones cortantes si tienden a hacer girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj, y negativas si en el contrario. Aquí, las tensiones cortantes son positivas en las caras verticales, y negativas en las horizontales. Además, se consideran positivas las tensiones normales de tracción, y negativas las de compresión.

(*c*) Primero situaremos el punto *b*, llevando σ_x y τ_{xy} con sus valores dados. La tensión cortante τ_{xy} en las caras verticales en que actúa σ_x es positiva, por lo que su valor se representa en la parte positiva del diagrama de abajo.



(*d*) Ahora situaremos el punto *d* de un modo análogo, tomando σ_x y τ_{xy} con sus valores dados. Se ha dibujado el diagrama de más arriba en la hipótesis de ser $\sigma_y > \sigma_x$, aunque el método usado sirve también si $\sigma_y < \sigma_x$. La tensión cortante σ_{xy} en las caras horizontales en las que actúa σ_y es negativa, por lo que este valor se toma debajo del eje de referencia.

(*e*) Ahora trazaremos la recta *bd*, situaremos su punto medio *c* y dibujaremos un círculo con centro en *c* y radio igual a *cb*. Este es el llamado círculo de Mohr.

Primero demostraremos que los puntos *g* y *h* del diámetro horizontal del círculo representan las tensiones principales. Para ello, observaremos que el punto *c* está a una distancia $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ del origen de coordenadas.

Además, el segmento jk tiene una longitud $(\sigma_y - \sigma_x)$, por lo que ck vale $\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$. Por la relación del triángulo rectángulo

$$(cd)^2 = (ck)^2 + (kd)^2 \quad \text{y} \quad cd = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Además, $cg = ch = cd$, por lo que la coordenada x del punto h es $(oc + ch)$ o

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Pero esta expresión es precisamente la tensión principal máxima, tal como se vio en la ecuación (5) del Problema 13. De igual modo, la coordenada x del punto g es $(oc - gc)$ o

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Y esta expresión es la tensión principal mínima, como se vio en la ecuación (6) del Problema 13. Por consiguiente, los puntos g y h representan las tensiones principales que existen en el elemento original. Vemos que la tangente del $\angle\, kcd = dk/ck = \tau_{xy}/\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$. Pero, de la ecuación (3) del Problema 13, tenemos

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}$$

y comparando estas dos relaciones vemos que $\angle\, kcd = 2\theta_p$, es decir, un giro en sentido contrario a las agujas del reloj desde el diámetro bd (correspondiente a las tensiones en las direcciones x-y) nos lleva al diámetro gh, que representa los planos principales, en los que tienen lugar las tensiones principales. Los planos principales forman un ángulo θ_p con la dirección x.

Por tanto, el círculo de Mohr es un instrumento muy útil para hallar las tensiones principales, pues basta con trazar el círculo para un conjunto dado de tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy} y medir og y oh. Estas abscisas representan las tensiones principales a la misma escala adoptada para σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Resulta evidente que el radio del círculo de Mohr, representado por cd, donde

$$cd = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\sigma_{xy})^2}$$

corresponde a la tensión cortante máxima dada por la ecuación (8) del Problema 13. En realidad, la tensión cortante en un plano cualquiera está representada por la ordenada del círculo de Mohr, por lo que los radios cl y cm representarán las máximas tensiones cortantes. El ángulo dcl es, evidentemente, $2\theta_c$, por lo que es indudable que el doble ángulo entre los planos de máxima tensión normal y los de tensión cortante máxima ($\angle\, kcl$) es 90°, y los planos de máxima tensión cortante están a 45° con los de tensión normal máxima.

Evidentemente, los extremos del diámetro bd representan las tensiones que actúan en las direcciones x e y originales. Ahora demostraremos que los extremos de cualquier otro diámetro, tal como ef (a un ángulo 2θ con bd), representan las tensiones en un plano que forma un ángulo θ con el eje x. Para ello, observemos que la abscisa del punto f está dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= oc + cn \\
&= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + (cf)\cos(2\theta_p - 2\theta) \\
&= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + (cf)(\cos 2\theta_p \cos 2\theta + \text{sen } 2\theta_p \text{ sen } 2\theta) \\
&= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}\,(\cos 2\theta_p \cos 2\theta + \text{sen } 2\theta_p \text{ sen } 2\theta)
\end{aligned}$$

Pero, de la observación del triángulo ckd que aparece en el círculo de Mohr, resulta evidente que

$$(1) \qquad \text{sen } 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}}, \qquad \cos 2\theta_p = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)}{\sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

Sustituyendo los valores de τ_{xy} y $\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$ de estas dos ecuaciones en la anterior, hallamos

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

Pero ésta es la tensión normal en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x, como se dedujo en la ecuación (*1*) del Problema 13.

Ahora, observaremos que la ordenada del punto f está dada por

$$\begin{aligned}\tau = nf &= (cf)\ \text{sen}\,(2\theta_p - 2\theta)\\ &= (cf)\,(\text{sen}\,2\theta_p\ \cos 2\theta - \cos 2\theta_p\ \text{sen}\,2\theta)\\ &= \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}\ (\text{sen}\,2\theta_p\ \cos 2\theta - \cos 2\theta_p\ \text{sen}\,2\theta)\end{aligned}$$

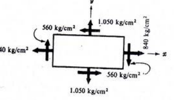
Nuevamente, sustituyendo los valores de τ_{xy} y $\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)$ de la ecuación (*1*) es ésta, hallamos

$$\tau = \tau_{xy}\ \cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\ \text{sen}\,2\theta$$

Pero ésta es la tensión cortante en un plano que forma un ángulo θ con el eje x, dada por la ecuación (*2*) del Problema 13.

Por tanto, las coordenadas del punto f del círculo de Mohr representan las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo θ con el eje x.

15. Un elemento plano está sometido a las tensiones que se indican en la figura adjunta. Determinar (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que se producen.



(*a*) De acuerdo con la notación del Problema 13 tenemos $\sigma_x = 840$ kg/cm², $\sigma_y = 1.050$ kg/cm² y $\tau_{xy} = 560$ kg/cm². La tensión normal máxima es, según la ecuación (*5*) del Problema 13,

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{max} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}\\ &= \tfrac{1}{2}(840 + 1.050) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(840 - 1.050)]^2 + (560)^2}\\ &= 945 + 570 = 1.515\ \text{kg/cm}^2\end{aligned}$$

La tensión normal mínima está dada por la ecuación (*6*) del Problema 13, y es

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{min} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}\\ &= 945 - 570 = 375\ \text{kg/cm}^2\end{aligned}$$

Según la ecuación (*3*) del Problema 13, las direcciones de los planos principales en los que se producen esas tensiones de 1.515 kg/cm² y 375 kg/cm² están dadas por

$$\text{tg}\ 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = -\frac{560}{\tfrac{1}{2}(840 - 1.050)} = 5{,}33$$

Luego, $2\theta_p = 79°24'$, $259°24'$ y $\theta_p = 39°42'$, $129°42'$.

Para determinar cuál de las tensiones principales anteriores tiene lugar en cada uno de esos planos, volveremos a la ecuación (*1*) del Problema 13

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\ \text{sen}\,2\theta$$

y sustituyendo $\theta = 39°42'$ junto con los valores dados de σ_x, σ_y y τ_{xy} obtenemos

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(840 + 1.050) - \tfrac{1}{2}(840 - 1.050)\cos 79°24' + 560\ \text{sen}\ 79°\,24' = 1.515\ \text{kg/cm}^2$$

Por tanto, un elemento orientado según los planos principales y sometido a las tensiones principales de más arriba aparece como en la figura siguiente. Las tensiones cortantes en esos planos son nulas.

En la ecuación (*8*) del Problema 13 se vio que la tensión cortante máxima es

$$\tau = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$= \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(840 - 1.050)]^2 + (560)^2}$$
$$= \pm 570 \ \text{kg/cm}^2$$

1.515 kg/cm² 375 kg/cm² 39°42′ 1.515 kg/cm² 375 kg/cm²

Según la ecuación (*7*) del Problema 13, los planos en que se producen esas tensiones cortantes máximas están definidos por

$$\text{tg } 2\theta_c = \frac{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}} = -0{,}188$$

Y $2\theta_c = 169°24', 349°24'$, $\theta_c = 84°42', 174°42'$. Evidentemente, estos planos están situados a 45° de los de tensión normal máxima y mínima.

Para determinar si la tensión cortante es positiva o negativa en el plano de 84°42′, volvemos a la ecuación (*2*) del Problema 13, es decir,

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

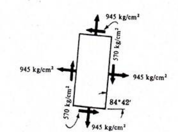
y sustituimos $\theta = 84°42'$ junto con los valores dados de σ_x, σ_y y τ_{xy}, obteniendo

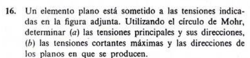
$$\tau = \tfrac{1}{2}(840 - 1.050) \text{ sen } 169°24' + 560 \cos 169°24' = -570 \ \text{kg/cm}^2$$

El signo menos indica que la tensión cortante está dirigida en sentido contrario al supuesto como positivo, representado en la primera figura del Problema 13. Finalmente, en la ecuación (*9*) del Problema 13 se mostró que las tensiones normales en estos planos de máxima tensión cortante son

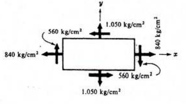
$$\sigma_n' = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= \tfrac{1}{2}(840 + 1.050) = 945 \ \text{kg/cm}^2$$

Por consiguiente, la orientación del elemento para el cual son máximas las tensiones cortantes es la que aparece en la figura adjunta.

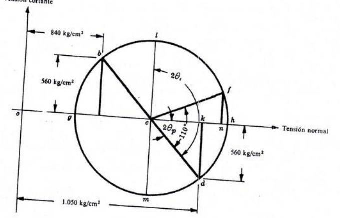




16. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la figura adjunta. Utilizando el círculo de Mohr, determinar (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que se producen.



En el Problema 14 se estudió el procedimiento para trazar el círculo de Mohr. De acuerdo con lo dicho allí, comprobamos que las tensiones cortantes en las caras verticales del elemento considerado son positivas, mientras que las de las caras horizontales son negativas. Así, el estado de tensiones $\sigma_x = 840$ kg/cm², $\tau_{xy} = 560$ kg/cm², que existe en las caras verticales del elemento, se representa por el punto *b* en el diagrama de abajo. El correspondiente a $\sigma_y = 1.050$ kg/cm², $\tau_{xy} = -560$ kg/cm² en las caras horizontales viene representado por el punto *d*. Se traza la recta *bd*, se sitúa su punto medio *c* y se dibuja un círculo de radio *cb* = *cd*, con centro en *c*. Es el círculo de Mohr. Los extremos del diámetro *bd* representan el estado de tensiones existente en el elemento si tiene la orientación original indicada más arriba.



Las tensiones principales están representadas por los puntos *g* y *h*, como se demostró en el Problema 14. Se puede determinar su valor, o midiendo directamente en el diagrama, o teniendo en cuenta que la coordenada de *c* es 945, que $ck = 105$, y que $cd = \sqrt{(105)^2 + (560)^2} = 570$, con lo que la tensión principal mínima es

$$(\sigma_n)_{\min} = og = oc - cg = 945 - 570 = 375 \text{ kg/cm}^2$$

Y la tensión principal máxima

$$(\sigma_n)_{\max} = oh = oc + ch = 945 + 570 = 1.515 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo $2\theta_p$ está dado por $\operatorname{tg} 2\theta_p = 560/105 = 5{,}33$, de donde $\theta_p = 39°42'$. También se podría haber obtenido este valor midiendo el $\angle\, dck$ en el círculo de Mohr. Se ve así que la tensión principal, representada por el punto *h*, actúa en un plano a 39°42′ del eje *x*. Las tensiones principales se presentan, pues, como en la Fig. (*a*). Del círculo de Mohr resulta evidente que las tensiones cortantes en esos planos son nulas, pues los puntos *g* y *h* están en el eje horizontal del círculo.

La tensión cortante máxima está representada por *cl*, en el círculo de Mohr. Ya se ha visto que el radio representa 570 kg/cm². El ángulo $2\theta_c$ se puede hallar por medida directa en el gráfico anterior o, sumando simplemente 90° al $2\theta_p$, que ya se ha determinado. Así se obtiene $2\theta_c = 169°24'$ y $\theta_c = 84°42'$. La tensión cortante, representada por el punto *l*, es positiva, por lo que en este plano a 84°42′ la tensión cortante tiende a girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.

Además, en el círculo de Mohr, la abscisa del punto *l* es 945 kg/cm² y representa la tensión normal que existe en los planos de tensión cortante máxima. Así, estas tensiones cortantes máximas aparecen como indica la Figura (*b*).

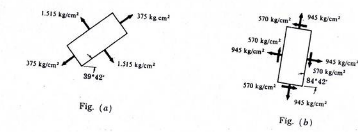
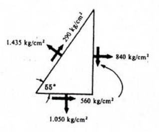


Fig. (*a*)

Fig. (*b*)

17. Determinar, para el elemento descrito en el Problema 16, las tensiones normal y cortante en un plano que forma un ángulo de 55° en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje x.

De acuerdo con las propiedades del círculo de Mohr, que se vieron en el Problema 14, los extremos del diámetro bd representan los estados de tensión existentes en los planos x-y. En un plano cualquiera inclinado un ángulo θ con el eje x, el estado de tensiones está representado por las coordenadas de un punto f, donde el radio cf forma una ángulo 2θ con el diámetro bd. Este ángulo 2θ que aparece en el círculo de Mohr, se mide en el mismo sentido que el que forma el plano inclinado, es decir, el contrario a las agujas del reloj.



Por tanto, solo tenemos que medir, en el círculo de Mohr del Problema 16, un ángulo de $2(55°) = 110°$, en sentido contrario a las agujas del reloj, desde la recta cd. Así se halla el punto f. La abscisa del punto f representa la tensión normal en el plano a 55° que se busca, y puede hallarse o midiendo directamente o viendo que

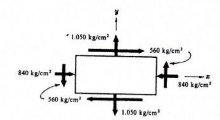
$$on = oc + cn = 945 + 570\cos(110° - 79°24') = 1.435 \text{ kg/cm}^2$$

La ordenada del punto f representa la tensión cortante en el plano a 55° que se busca, y se puede hallar por la relación

$$fn = 570 \operatorname{sen}(110° - 79°24') = 290 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, las tensiones que actúan en el plano a 55° se pueden representar como en el diagrama de arriba.

18. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la figura adjunta. Determinar (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que se producen.



(*a*) De acuerdo con la notación del Problema 13, $\sigma_x = -840$ kg/cm², $\sigma_y = 1.050$ kg/cm² y $\tau_{xy} = -560$ kg/cm². Por la ecuación (*5*) del Problema 13, la tensión normal máxima es

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{max} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= \tfrac{1}{2}(-840 + 1.050) + \sqrt{[\tfrac{1}{2}(-840 - 1.050)]^2 + (-560)^2} \\ &= 105 + 1.100 = 1.205 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

Según la ecuación (*6*) del Problema 13, la tensión normal mínima es

$$\begin{aligned}(\sigma_n)_{min} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= 105 - 1.100 = -995 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

Según la ecuación (*3*) del Problema 13, las direcciones de los planos principales en los que se producen estas tensiones de 1.205 kg/cm² y −995 kg/cm² están dadas por

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = -\frac{-560}{\tfrac{1}{2}(-840 - 1.050)} = -0{,}592$$

Luego $2\theta_p = 149°24', 329°24'$ y $\theta_p = 74°42', 164°42'$.

Para determinar cuál de las tensiones principales anteriores se produce en cada uno de esos planos, volveremos a la ecuación (*1*) del Problema 13, es decir,

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

y sustituiremos $\theta = 74°42'$ junto con los valores dados de σ_x, σ_y y τ_{xy}, obteniendo

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(-840 + 1.050) - \tfrac{1}{2}(-840 - 1.050)\cos 149°24' - 560\,\text{sen}\,149°24' = -995\ \text{kg/cm}^2$$

Por consiguiente, un elemento orientado según los planos principales y sometido a las tensiones principales indicadas aparece como en la figura adjunta. Las tensiones cortantes en esos planos son cero.

1.205 kg/cm²
995 kg/cm²
995 kg/cm²
74°42'
1.205 kg/cm²

En la ecuación (*8*) del Problema 13 se vio que la tensión cortante máxima es

$$\tau = \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)]^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$= \pm\sqrt{[\tfrac{1}{2}(-840 - 1.050)]^2 + (-560)^2}$$
$$= \pm 1.100\ \text{kg/cm}^2$$

Según la ecuación (*7*) del Problema 13, los planos en que se producen esas tensiones cortantes máximas están definidos por

$$\text{tg}\ 2\theta_c = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)/\tau_{xy} = 1{,}69$$

Luego, $2\theta_c = 59°24'$, $239°24'$ y $\theta_e = 29°42'$, $119°42'$. Es evidente que esos planos están situados a 45° de los de tensiones normales máxima y mínima.

Para determinar si la tensión cortante es positiva o negativa en el plano a 29°42', volvemos a la ecuación (*2*) del Problema 13, es decir,

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

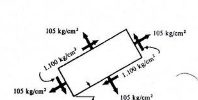
y sustituimos $\theta = 29°42'$ junto con los valores dados de σ_x; σ_y y τ_{xy}, obteniendo

$$\tau = \tfrac{1}{2}(-840 - 1.050)\,\text{sen}\,59°24' - 560\cos 59°24' = -1.100\ \text{kg/cm}^2$$

El signo menos indica que la tensión cortante en el plano a 29°42' está dirigida en sentido contrario al supuesto como positivo en la figura del Problema 13. En la ecuación (*9*) del Problema 13 se vio que las tensiones normales en estos planos de máxima tensión cortante son

$$\sigma_n' \quad \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= \tfrac{1}{2}(-840 + 1.050) = 105\ \text{kg/cm}^2$$

Por consiguiente, la orientación del elemento para el cual las tensiones cortantes son máximas es la indicada en la figura adjunta.



19. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la Fig. (*a*) de la página siguiente. Utilizando el círculo de Mohr, determinar (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las máximas tensiones cortantes y las direcciones de los planos en que se producen.

Se hace referencia nuevamente al Problema 14 para el procedimiento a seguir para trazar el círculo de Mohr. De acuerdo con el criterio de signos expuesto allí, las tensiones cortantes en las caras verticales del elemento son negativas y las de las horizontales, positivas. Así, el estado de tensiones $\sigma_x = -840$ kg/cm², $\tau_{xy} = -560$ kg/cm²,

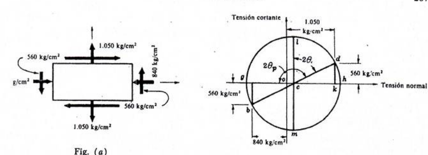


Fig. (a)

Fig. (b)

que existe en las caras verticales del elemento, se representa por el punto b de la Fig. (b). El de las caras horizontales, $\sigma_y = 1.050$, $\tau_{xy} = 560$ kg/cm², se representa por el punto d. Trazada la recta bd y determinado el punto medio c, se traza un círculo de radio $cb = cd$ con centro en c. Es el círculo de Mohr. Los extremos del diámetro bd representan el estado de tensiones que existe en el elemento si tiene la orientación original representada.

Las tensiones principales están representadas por los puntos g y h, como se vio en el Problema 14. Se puede hallar su valor midiendo directamente en el diagrama anterior o teniendo en cuenta que la coordenada de c es 105, que $ck = 945$ y que $cd = \sqrt{(945)^2 + (560)^2} = 1.100$. Así, la tensión principal mínima es

$$(\sigma_n)_{min} = og = oc - cg = 105 - 1.100 = -995 \text{ kg/cm}^2$$

Y la tensión principal máxima

$$(\sigma_n)_{max} = oh = oc + ch = 105 + 1.100 = 1.205 \text{ kg/cm}^2$$

El ángulo $2\theta_p$ está dado por tg $2\theta_p = -560/945 = -0,592$, de donde $\theta_p = 74°42'$. También se podría haber obtenido este valor midiendo directamente en el círculo de Mohr el $\angle\, dcg$. Se ve que la tensión principal representada por el punto g actúa en un plano a 74°42′ del eje x. Las tensiones principales aparecen, pues, como en la Fig. (c). Como las ordenadas de los puntos g y h son las dos nulas, las tensiones cortantes en esos planos son cero.

La tensión cortante máxima está representada en el círculo de Mohr por cl. Ya se ha visto que este radio representa 1.100 kg/cm². El ángulo $2\theta_c$ se puede hallar bien midiendo directamente en el gráfico de arriba o bien restando simplemente 90° del ángulo $2\theta_p$ que ya se ha determinado. Se obtiene $2\theta_c = 59°24'$ y $\theta_c = 29°42'$. La tensión cortante representada por el punto l es positiva, por lo que en este plano a 29°42′ la tensión cortante tiende a girar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.

Además, en el círculo de Mohr, la abscisa del punto l es 105 kg/cm², lo que representa la tensión normal que existe en los planos de máxima tensión cortante. Estas tensiones cortantes máximas aparecen, pues, como en la Figura (d).

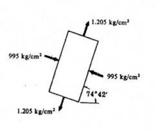


Fig. (c)

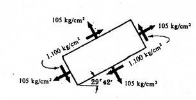


Fig (d)

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Una barra uniforme de sección 6 × 9 cm está sometida a una fuerza de tracción axial de 54.000 kg en cada uno de sus extremos. Determinar la tensión cortante máxima en la barra. *Sol.* 500 kg/cm²

21. En el Problema 20, determinar las tensiones normal y cortante que actúan en un plano inclinado 20° con la línea de acción de las cargas axiales. *Sol.* $\sigma_n = 117$ kg/cm², $\tau = 321$ kg/cm²

22. Una barra cuadrada de dos centímetros de lado está sometida a una carga de compresión axial de 2.240 kg. Determinar las tensiones normal y cortante que actúan en un plano inclinado 30° respecto a la línea de acción de las cargas axiales. La barra es lo suficientemente corta para poder despreciar la posibilidad de pandeo. *Sol.* $\sigma_n = -140$ kg/cm², $\tau = -242$ kg/cm²

23. Resolver nuevamente el Problema 22 utilizando el círculo de Mohr. *Sol.* Véase la Figura (*a*). $\sigma_n = ko = -140$ kg/cm², $\tau = dk = 242$ kg/cm²

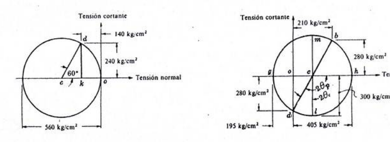


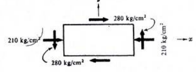
Fig. (*a*) Prob. 23 Fig. (*b*) Prob. 26

24. Un elemento plano de un cuerpo está sometido a las tensiones $\sigma_x = 210$ kg/cm², $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 280$ kg/cm². Determinar analíticamente las tensiones normal y cortante que existen en un plano inclinado 45° con el eje x. *Sol.* $\sigma_n = 385$ kg/cm², $\tau = 105$ kg/cm²

25. Determinar analíticamente, para el elemento del Problema 24, las tensiones principales y sus direcciones, así como las máximas tensiones cortantes y las direcciones de los planos en que tienen lugar.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 405$ kg/cm² a 55°15′, $(\sigma_n)_{min} = -195$ kg/cm² a 145°15′, $\tau = 300$ kg/cm² a 10°15′

26. Resolver nuevamente el Problema 25 utilizando el círculo de Mohr. *Sol.* véase la Figura (*b*).

27. Un elemento plano de un cuerpo está sometido a las tensiones indicadas en la figura adjunta. Determinar analíticamente (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que tienen lugar.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 195$ kg/cm² a 145°15′
$(\sigma_n)_{min} = -405$ kg/cm² a 55°15′
$\tau = 300$ kg/cm² a 10°15′



28. Para el elemento del Problema 27, determinar las tensiones normal y cortante que actúan en un plano inclinado 30° con el eje x. *Sol.* $\sigma_n = 400$ kg/cm², $\tau = 230$ kg/cm²

29. Un elemento plano está sometido a las tensiones $\sigma_x = 560$ kg/cm² y $\sigma_y = 560$ kg/cm². Determinar analíticamente la tensión cortante máxima que existe en el elemento. *Sol.* Cero

30. ¿Qué forma adopta el círculo de Mohr para las solicitaciones descritas en el Problema 29?
Sol. Un punto del eje horizontal situado a la distancia de 560 kg/cm² (a escala) desde el origen.

31. Un elemento plano está sometido a las tensiones $\sigma_x = 560$ kg/cm² y $\sigma_y = -560$ kg/cm². Determinar analíticamente la tensión cortante máxima que existe en el elemento. ¿Cuál es la dirección de los planos en que se producen las máximas tensiones cortantes? *Sol.* 560 kg/cm² a 45°

32. Para el elemento del Problema 31, determinar analíticamente las tensiones normal y cortante que actúan en un plano inclinado un ángulo de 30° con el eje *x*. *Sol.* $\sigma_n = -280$ kg/cm², $\tau = 485$ kg/cm²

33. Dibujar el círculo de Mohr para un elemento plano sometido a las tensiones $\sigma_x = 560$ kg/cm² y $\sigma_y = -560$ kg/cm². Determinar con el círculo de Mohr, las tensiones que actúan en un plano inclinado 20° con el eje *x*.
Sol. Véase la Fig. (*c*). $\sigma_n = on = -430$ kg/cm², $\tau = nf = -360$ kg/cm²

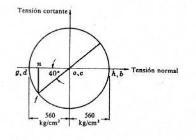


Fig. (*c*) Prob. 33

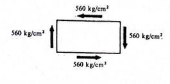


Fig. (*d*) Prob. 34

34. Un elemento plano extraído de una envuelta cilíndrica delgada, sometido a torsión, soporta las tensiones cortantes representadas en la Fig. (*d*). Determinar las tensiones principales que existen en el elemento y las direcciones de los planos en que se producen. *Sol.* 560 kg/cm² a 45°

35. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la Fig. (*e*). Determinar analíticamente (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en qué actúan.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 1.745$ kg/cm² a 121°45′, $(\sigma_n)_{min} = 495$ kg/cm² a 31°45′, $\tau = 625$ kg/cm² a 76°45′

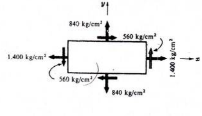


Fig. (*e*) Prob. 35

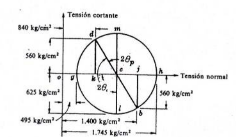


Fig. (*f*) Prob. 36

36. Resolver nuevamente el Problema 35 utilizando el círculo de Mohr. *Sol.* Véase la Figura (*f*).

37. Considerar nuevamente el elemento del Problema 35. Determinar analíticamente las tensiones normal y cortante en un plano inclinado un ángulo de 20 con el eje x. *Sol.* $\sigma_n = 545$ kg/cm². $\tau = -247$ kg/cm²

38. Resolver nuevamente el Problema 37 utilizando el círculo de Mohr.
Sol. Véase la Fig. (*g*). $\sigma_n = 545$ kg/cm²
$\tau = 245$ kg/cm²

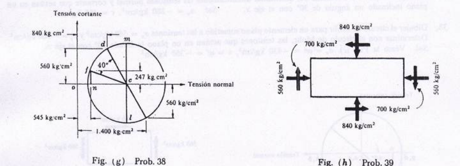


Fig. (*g*) Prob. 38 Fig. (*h*) Prob. 39

39. Un elemento plano está sometido a las tensiones indicadas en la Fig. (*h*). Determinar analíticamente (*a*) las tensiones principales y sus direcciones, (*b*) las tensiones cortantes máximas y las direcciones de los planos en que actúan. *Sol.* $(\sigma_n)_{max} = 15$ kg/cm² a 50°40'. $(\sigma_n)_{min} = -1.415$ kg/cm² a 140°40'. $\tau = 715$ kg/cm² a 5°40'

40. Repetir el Problema 39 utilizando el círculo de Mohr. *Sol.* Véase la Figura (*i*).

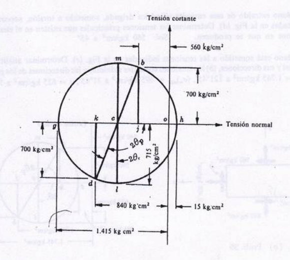


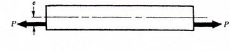
Fig. (*i*). Prob. 40

CAPITULO 16

Elementos cargados excéntricamente y elementos sometidos a solicitaciones combinadas

ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE SOMETIDOS A CARGAS CONCENTRICAS. En los Capítulos 1 y 2 hemos considerado numerosos casos de barras rectas sometidas a solicitaciones de tracción o de compresión. En todos los problemas se exigía que la línea de acción de la fuerza aplicada pasase por el centro de gravedad de la sección del elemento. No se consideró ningún problema en el que no fuera cierto esto.

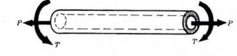
ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE SOMETIDOS A CARGAS EXCENTRICAS. En este capítulo consideraremos los casos en que la línea de acción de la fuerza aplicada a una barra, en tracción o compresión, no pasa por el centro de gravedad de la sección. En la figura adjunta se representa un ejemplo típico de esta solicitación.



Para las secciones de la barra perpendiculares a la dirección de la carga, la tensión resultante en cada punto es la suma de la tensión directa debida a la carga concéntrica de igual magnitud P y una tensión de flexión debida a un par de momento Pe. La primera se halla por la expresión deducida en el Capítulo 1, es decir, $\sigma = P/A$, y la segunda por la fórmula de la tensión de flexión dada en el Capítulo 8, o sea, $\sigma = My/I$. En los Problemas 1, 2 y 3 se pueden hallar aplicaciones.

ENVUELTAS CILINDRICAS SOMETIDAS A PRESION INTERNA Y TRACCION AXIAL COMBINADAS. En el Capítulo 3 se consideraron las tensiones que se producen en una envuelta cilíndrica delgada sometida a presión interna uniforme. Se vio que actúa una tensión longitudinal dada por $\sigma_L = pr/2t$, junto con otra tensión tangente dada por $\sigma_T = pr/t$, originadas por la presión interna p. Si, además, actúa una tracción axial P simultáneamente con la presión interna, se produce una tensión longitudinal adicional dada por $\sigma = P/A$, donde A expresa el área de la sección de la envuelta. La tensión resultante en la dirección longitudinal es, pues, la suma algebraica de esas dos tensiones longitudinales y la resultante en dirección tangencial es igual a la debida a la presión interna. Se pueden encontrar aplicaciones en el Problema 4.

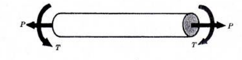
ENVUELTAS CILINDRICAS SOMETIDAS A TORSION Y TRACCION AXIAL COMBINADAS. En el Capítulo 5 consideramos las tensiones originadas en una envuelta cilíndrica delgada sometida a torsión. Se vio que en las secciones perpendiculares al eje del cilindro existe una tensión cortante dada por $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. Si, además, simultáneamente con el par actúa una tracción axial P, se produce una tensión longitudinal de valor $\sigma = P/A$. Esta solicitación está representada en la figura adjunta.



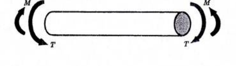
En este caso, las tensiones debidas a las dos solicitaciones actúan en direcciones diferentes y hay que hacer uso de los resultados obtenidos en el Capítulo 15. De este

modo será posible obtener las tensiones principales debidas a las dos cargas aplicadas simultáneamente. Para aplicaciones, véanse los Problemas 5 y 6.

ARBOL CIRCULAR SOMETIDO A TRACCION AXIAL Y TORSION COMBINADAS. Este caso se representa más abajo. Debido a la fuerza de tracción axial P, existe una tensión de tracción longitudinal uniforme $\sigma = P/A$, donde A expresa la sección de la barra. Por el Capítulo 5 sabemos que existe una tensión cortante de tracción en cada sección perpendicular al eje, dada por $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. También ahora, las tensiones debidas a las dos solicitaciones actúan en direcciones diferentes y para obtener los valores de las tensiones principales en un punto o para hallar el estado de tensiones en un plano inclinado cierto ángulo con una generatriz del árbol, hay que utilizar los resultados del Capítulo 15. Para aplicaciones, véanse los Problemas 7 y 8.



ARBOL CIRCULAR SOMETIDO A FLEXION Y TORSION COMBINADAS. Este caso se representa más abajo. También, por el Capítulo 5, sabemos que existe una tensión cortante de torsión en cada sección perpendicular al eje, dada por $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. Por el Capítulo 8 sabemos que existe también una tensión de flexión perpendicular a esa sección, esto es, en la dirección del eje del árbol, de valor $\sigma = My/I$. Como estas tensiones actúan en diferentes direcciones, para obtener los valores de las tensiones principales en un punto cualquiera del árbol o para hallar el estado de tensiones en un plano inclinado respecto a una generatriz, hay que usar los resultados del Capítulo 15. Para aplicaciones, véanse los Problemas 9, 10 y 11.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considerar el taco corto sometido a una fuerza de compresión de 5.000 kg. La fuerza está aplicada con una excentricidad de 2 cm, como se ve en la Fig. (*a*). Determinar las tensiones en las fibras extremas del taco.

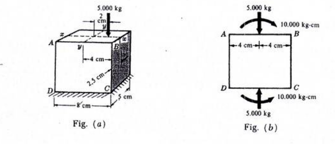


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

La fuerza se puede sustituir por un sistema estáticamente equivalente consistente en una fuerza de 5.000 kg que actúa en el centro de gravedad junto con un par de magnitud 10.000 kg-cm que actúa respecto al eje y-y. El diagrama de cuerpo en libertad tiene el aspecto que muestra la Figura (*b*).

Debido a la carga de 5.000 kg aplicada centrada, tenemos una tensión de compresión uniformemente repartida de

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{5.000}{8(5)} = 125 \text{ kg/cm}^2$$

sobre cualquier superficie horizontal. Es lo que aparece en la Figura (*c*).

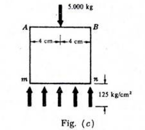


Fig. (*c*)

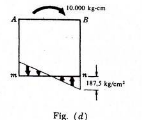


Fig. (*d*)

Debido al par de 10.000 kg-cm tenemos una distribución uniformemente variable de tensiones normales o de flexión a lo largo de la sección, como se estudió en el Capítulo 8. Las tensiones en las fibras extremas están dadas por

$$\sigma_2 = \frac{Mv}{I} = \frac{10.000(4)}{5(8^3)/12} = 187{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Esta distribución de tensiones aparece en la Figura (*d*).

Las tensiones que actúan en la sección horizontal están dirigidas todas verticalmente, por lo que se pueden superponer para obtener una tensión normal en m de

$$\sigma_m = -125 + 187{,}5 = 62{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

y una tensión normal en n de

$$\sigma_n = -125 - 187{,}5 = -312{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

En estas expresiones, los signos menos indican compresión y los positivos, tracción. Se supone, evidentemente, que las tensiones resultantes no exceden del límite de proporcionalidad del material, pues de lo contrario no sería admisible la aplicación de la expresión usada para las tensiones de flexión.

Este método es válido solamente si los ejes x e y lo son de simetría de la sección.

2. Un bloque corto está cargado con una fuerza de compresión de 50.000 kg que actúa a 4 cm de un eje y a 6 cm del otro, de una sección de 16 × 16 cm, como se indica en la Fig. (*a*). Determinar las tensiones máximas de tracción y de compresión en la sección.

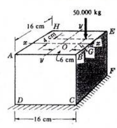


Fig. (*a*)

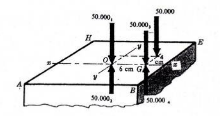


Fig. (*b*)

Consideremos el centro geométrico O de la sección, y el punto G situado en un eje de simetría, y separado 6 cm de O. Introduzcamos en cada uno de esos puntos una pareja de fuerzas iguales y opuestas, de magnitud 50.000 kg cada una de ellas. La cara superior presentará el aspecto indicado en la Figura (*b*).

Las cuatro fuerzas que se han añadido se representarán por 50.000_1, 50.000_2, etc., y constituyen un sistema en equilibrio. Por tanto, no modifican el estado de tensiones original del cuerpo, sino que simplemente proporcionan un método más sencillo de cálculo.

La fuerza 50.000_1 kg produce una tensión de compresión uniformemente repartida en cada sección horizontal. Las fuerzas 50.000 kg y 50.000_4 kg constituyen un par que da origen a una flexión respecto al eje *x-x*. Las fuerzas 50.000_2 kg y 50.000_3 kg forman un par que produce una flexión respecto al eje *y-y*.

Debido a la fuerza 50.000_1 kg, tenemos una tensión de compresión uniforme

$$\sigma_1 = \frac{50.000}{(16)(16)} = 195 \text{ kg/cm}^2$$

El par constituido por las fuerzas 50.000_4 kg y 50.000 kg produce tracción máxima a lo largo de la recta *AB* y máxima compresión en *HE*. Los valores de estas tensiones en las fibras extremas son

$$\sigma_2 = \frac{50.000(4)(8)}{16(16^3)/12} = 293 \text{ kg/cm}^2$$

El par formado por las fuerzas 50.000_2 kg y 50.000_3 kg da origen a tracción máxima en la recta *AH* y máxima compresión en *BE*. Los valores de estas tensiones en las fibras extremas son

$$\sigma_3 = \frac{50.000(6)(8)}{16(16^3)/12} = 439 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión de compresión máxima se produce en *EF* y está dada por

$$\sigma_4 = -195 - 293 - 439 = -927 \text{ kg/cm}^2$$

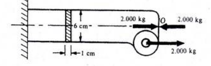
La máxima tensión de tracción se produce en la línea *AD* y es igual a

$$\sigma_5 = -195 + 293 + 439 = 537 \text{ kg/cm}^2$$

Las tensiones σ_4 y σ_5 están dirigidas verticalmente.

Debe observarse que este método es válido solamente en los casos en que los ejes *x* e *y* lo son de simetría de la sección.

3. La ménsula representada en la figura adjunta está cargada con una fuerza de 2.000 kg aplicada a 3 cm del centro de gravedad. Determinar las tensiones en las fibras extremas de una sección vertical.



Se puede sustituir la fuerza aplicada de 2.000 kg por otra que actúe en el centro de gravedad de la sección juntamente con un par. Para ello, se introducen dos fuerzas iguales y opuestas de 2.000 kg en el punto *O* que coincide con el centro de gravedad de la sección. La que está dirigida hacia la derecha en la figura da origen a una tensión de tracción uniforme sobre la sección. Esta tensión es

$$\sigma_1 = \frac{2.000}{(1)(6)} = 333 \text{ kg/cm}^2$$

La fuerza dirigida hacia la izquierda, junto con la original, constituyen un par de valor 2.000(3) = 6.000 kg-cm. En las fibras extremas, este par produce tensiones de flexión dadas por

$$\sigma_2 = \frac{Mc}{I} = \frac{6.000(3)}{(1)(6^3)/12} = 1.000 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones de flexión son tracciones en las fibras inferiores y compresiones en las superiores. Así, las tensiones resultantes obtenidas por superposición de las axiales y las de flexión son las siguientes:

En las fibras inferiores $\quad \sigma_3 = 333 + 1.000 = 1.333 \text{ kg/cm}^2$

En las fibras superiores $\quad \sigma_4 = 333 - 1.000 = -667 \text{ kg/cm}^2$

Los signos más indican tracción y los menos, compresión.

4. Los tubos cilíndricos de pared delgada están sometidos frecuentemente a tracción axial y presión interna combinadas. Si un cilindro de 70 cm de diámetro y espesor de pared 3 mm está sometido a una presión interna uniforme de 2,4 kg/cm² junto con una tracción axial de 25.000 kg, determinar la máxima tensión de tracción en el cilindro.

Debido a la tracción axial de 25 000 kg, tenemos una tensión de tracción uniformemente repartida de

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{25.000}{\pi(70)(0,3)} = 380 \text{ kg/cm}^2$$

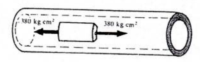


Fig. (a)

sobre toda la sección. Esta tensión actúa sobre un elemento de la pared del cilindro como se ve en la Figura (a).

Las tensiones debidas a una presión interna uniforme se determinaron en el Problema 1 del Capítulo 3. Se halló que la tensión tangente σ_T era $\sigma_T = pr/h$, donde r expresa el radio del cilindro, h su espesor y p la presión interna. Se vio también que la tensión longitudinal σ_L valía $\sigma_L = pr/2h$. Para los valores dados de p, r y h, tenemos

$$\sigma_T = \frac{pr}{h} = \frac{2,4(35)}{0,3} = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_L = \frac{pr}{2h} = \frac{2,4(35)}{2(0,3)} = 140 \text{ kg/cm}^2$$

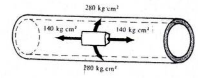


Fig. (b)

Estas tensiones actúan en un elemento de la envuelta cilíndrica, como se muestra en la Figura (b).

Como las dos solicitaciones actúan simultáneamente, es necesario combinar esas tensiones. Sumando las de dirección longitudinal, hallamos una tensión longitudinal resultante de 140 + 380 = 520 kg/cm². La tensión tangente resultante es 280 kg/cm², pues la carga axial no da origen a tensiones tangentes.

Así, pues, la tensión de tracción máxima en la envuelta actúa en la dirección longitudinal y tiene el valor de 520 kg/cm².

5. Considerar una envuelta cilíndrica delgada sometida a tracción axial y torsión combinadas. La envuelta tiene 40 cm de diámetro y el espesor de pared es de 2,5 mm. El cilindro está sometido a una tracción axial de 17.500 kg junto con un par de 440.000 kg-cm. Determinar las tensiones principales. Hallar, también, las tensiones cortantes máximas.

Debido a la tracción axial de 17.500 kg, existe una tensión de tracción uniformemente repartida dada por

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{17.500}{\pi(40)(0,25)} = 557 \text{ kg/cm}^2$$

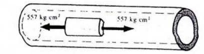


Fig. (a)

sobre cada sección. Esta tensión aparece como en la Figura (a).

En el Problema 2 del Capítulo 5 se determinaron las tensiones cortantes debidas a un par. Se vio que su valor en la pared de la envuelta era $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. Para un tubo de pared delgada como el que tenemos, se vio en el Problema 9 del Capítulo 5 que el momento polar de inercia es

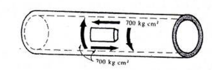


Fig. (b)

$$I_p = 2\pi R^3 t = 2\pi(20)^3(0{,}25) = 12.565 \text{ cm}^4$$

La tensión cortante en la envuelta es, pues,

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{440.000(20)}{12.565} = 700 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones son como se indica en la Fig. (*b*) anterior.

Como ambas solicitaciones actúan simultáneamente, es necesario combinar estas tensiones. En los problemas anteriores de este capítulo las tensiones a combinar debidas a varias cargas actuaban todas en las mismas direcciones y su composición se reducía a una simple suma algebraica.

En este problema las tensiones tienen direcciones diferentes y hay que emplear los métodos vectoriales explicados en el Capítulo 15. En el Problema 7 de ese Capítulo se trató el caso de una tensión normal junto con una cortante en un elemento. Utilizando la notación de ese problema, tenemos aquí

$$\sigma_x = 557 \text{ kg/cm}^2, \qquad \tau_{xy} = 700 \text{ kg/cm}^2$$

Según el Problema 7, las tensiones principales son

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 557/2 + \sqrt{(557/2)^2 + (700)^2} = 1.030 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 557/2 - \sqrt{(557/2)^2 + (700)^2} = 475 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones tienen lugar en planos definidos por la ecuación (*3*) del Problema 7:

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{700}{557/2} = -2{,}5 \qquad \text{y} \qquad \theta_p = 55°50', \ 145°50'$$

Sustituyendo en la ecuación (*1*) del Problema 7, haciendo $\theta = 55°50'$, tenemos

$$\sigma_n = 557/2 - (557/2) \cos 111°40' + 700 \text{ sen } 110°40' = 1.030 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión principal máxima de 1.030 kg/cm² se produce en un plano a 55°50′ con el eje longitudinal de la envuelta.

Según la ecuación (*8*) del Problema 7, las máximas tensiones cortantes son

$$\tau = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{(557/2)^2 + (700)^2} = \pm 753 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones tienen lugar en planos orientados a 45° de aquellos en que se producen las tensiones normales máximas.

6. Para el tubo de pared delgada del Problema 5, determinar la tensión normal que actúa en un plano a 30° con una generatriz.

En el Problema 5 se halló $\sigma_x = 557$ kg/cm², $\tau_{xy} = 700$ kg/cm².

Por el Problema 7, Capítulo 15, ecuación (*1*), tenemos que la tensión normal en un plano que forma un ángulo θ con la dirección de σ_x está dada por

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

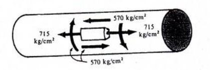
Sustituyendo $\theta = 30°$, $\sigma_n = 557/2 - (557/2) \cos 60° + 700 \text{ sen } 60° = 745$ kg/cm².

7. Un árbol circular macizo de 7 cm de diámetro está sometido a una tracción axial de 27.500 kg así como a un momento torsor de 38.500 kg-cm. Determinar la tensión de tracción máxima en el árbol.

La tracción axial da origen a una tensión de tracción uniforme de

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{27.500}{\tfrac{1}{4}\pi(7)^2} = 715 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión cortante producida por el momento torsor T, según se vio en el Problema 2 del Capítulo 5, que es $\tau_{xy} = T\rho/I_p$, donde ρ indica la coordenada radial e I_p el momento de inercia polar de la sección. En el Capítulo 5 se demostró, y resulta evidente de la ecuación anterior, que la tensión cortante es máxima en las fibras extremas. Por tanto, su valor es



$$\tau_{xy} = \frac{38.500(3{,}5)}{\pi(7)^4/32} = 570 \text{ kg/cm}^2$$

Así, pues, un elemento de la superficie exterior del árbol está sometido a las tensiones representadas más arriba. En el Problema 7 del Capítulo 15 se estudió el estado de tensiones en un plano inclinado de este elemento para este tipo de solicitación. Se vio que las tensiones principales eran

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 715/2 + \sqrt{(715/2)^2 + (570)^2} = 1.030 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 715/2 - \sqrt{(715/2)^2 + (570)^2} = 315 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones se producen en planos definidos por la ecuación (*3*) del Problema 7:

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{570}{715/2} = -1{,}60 \quad \text{y} \quad \theta_p = 61°0',\ 151°0'$$

Sustituyendo $\theta = 61°0'$ en la ecuación (*1*) del Problema 7, tenemos

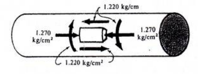
$$\sigma_n = 715/2 - (715/2)\cos 122°0' + 570 \text{ sen } 122°0' = 1.030 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión cortante máxima es 1.030 kg/cm² y se produce en un plano a 61°0' del eje geométrico del árbol.

8. Un árbol de 5 cm de diámetro está sometido a una fuerza de compresión axial de 25.000 kg junto con un momento de torsión de 30.000 kg-m. Determinar las tensiones principales y la máxima tensión cortante en el árbol.

La fuerza axial da origen a una tensión de compresión uniforme de

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{25.000}{\tfrac{1}{4}\pi(5)^2} = 1.270 \text{ kg/cm}^2$$



La tensión cortante debida al momento torsor aplicado se vio en el Problema 2 del Capítulo 5, que es $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. Es máxima en las fibras extremas del árbol y vale

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{30.000(2{,}5)}{\pi(5)^4/32} = 1.220 \text{ kg/cm}^2$$

Un elemento de la superficie exterior del árbol está sometido, pues, a las tensiones representadas más arriba.

En el Problema 7 del Capítulo 15 se demostró que las tensiones principales en un elemento, para este tipo de solicitación, son

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = -1.270/2 + \sqrt{(-1.270/2)^2 + (1.220)^2} = 740 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = -1.270/2 - \sqrt{(-1.270/2)^2 + (1.220)^2} = -2.010 \text{ kg/cm}^2$$

Por la ecuación (*8*) del Problema 7, del Capítulo 15, la tensión cortante máxima es

$$\tau = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{(-1.270/2)^2 + (1.220)^2} = \pm 1.375 \text{ kg/cm}^2$$

9. Considerar un árbol circular macizo sometido a un momento torsor constante de 6.000 kg-cm y a un momento flector constante de 2.500 kg cm. El diámetro del árbol es de 4,50 cm. Determinar las tensiones principales en el cuerpo.

El momento torsor da origen a tensiones cortantes que alcanzan su máximo valor en las fibras extremas del árbol. Según el Problema 2 del Capítulo 5, están dadas por $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. En las fibras extremas

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{6.000(4,5/2)}{\pi(4,5)^4/32} = 335 \text{ kg/cm}^2$$

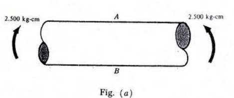


Fig. (*a*)

Si se supone que el momento flector está en un plano vertical, como se indica en la Fig. (*a*), las fibras extremas expresadas por A y B estarán sometidas a las tensiones de flexión máximas. Según el Problema 1 del Capítulo 8, la tensión de tracción en B está dada por $\sigma_x = My/I$. En esta expresión, I representa el momento de inercia de la sección respecto a un diámetro. Para un árbol circular macizo se vio en el Problema 11 del Capítulo 7 que es $I = \pi d^4/64$, donde d representa el diámetro del árbol. Sustituyendo,

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{2.500(4,5/2)}{\pi(4,5)^4/64} = 280 \text{ kg/cm}^2$$

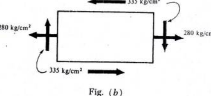


Fig. (*b*)

Por consiguiente, un elemento situado en el extremo inferior de la barra (en cualquier parte de la fibra inferior) está sometido al estado de tensiones representado en la Figura (*b*).

En el Problema 7 del Capítulo 15 se vio que las tensiones principales para un elemento sometido a este tipo de tensiones son

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 280/2 + \sqrt{(280/2)^2 + (336)^2} = 503 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 280/2 - \sqrt{(280/2)^2 + (336)^2} = -223 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones se producen en planos definidos por la ecuación (*3*) del Problema 7:

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{336}{280/2} = -2{,}40 \quad \text{y} \quad \theta_p = 56°15', \ 146°15'$$

Sustituyendo $\theta = 56°15'$ en la ecuación (*1*) del Problema 7, tenemos

$$\sigma_n = 280/2 - (280/2)\cos 112°30' + 336 \text{ sen } 112°30' = 503 \text{ kg/cm}^2$$

Así, pues, la tensión de tracción máxima es 503 kg/cm², y se produce en un plano a 56°15′ con el eje geométrico del árbol.

10. Considerar un árbol circular hueco cuyo diámetro exterior es de 8 cm y el interior la mitad del exterior. El árbol está sometido a un momento torsor de 20.000 kg-cm y a un momento flector de 30.000 kg-cm. Determinar las tensiones principales en el cuerpo. Hallar también la tensión cortante máxima.

El momento torsor da origen a tensiones cortantes que alcanzan sus valores máximos en las fibras extremas del árbol. Según el Problema 2 del Capítulo 5 dichas tensiones están dadas por $\tau_{xy} = T\rho/I_p$. En el Problema 1 del Capítulo 5 se vio que para el área circular hueca

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32}(8^4 - 4^4) = 377 \text{ cm}^4$$

donde D_e indica el diámetro exterior y D_i representa el interior. En las fibras extremas, las tensiones cortantes de torsión son, pues,

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{20.000(4)}{377} = 213 \text{ kg/cm}^2$$

Supongamos que los momentos flectores están en un plano vertical. Las fibras superior e inferior de la viga estarán sometidas a las tensiones de flexión máximas. Su valor se halla por la expresión $\sigma_x = My/I$. El momento de inercia I de una sección circular hueca se puede ver en el Problema 11 del Capítulo 7, que es

$$I = \frac{\pi}{64}(D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64}(8^4 - 4^4) = 188 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo,

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{30.000(4)}{188} = 640 \text{ kg/cm}^2$$

Así, pues, un elemento situado en el extremo inferior del árbol está sometido a las tensiones representadas en la figura adjunta.

Según el Problema 7 del Capítulo 15, las tensiones principales en este elemento son

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 640/2 + \sqrt{(640/2)^2 + (213)^2} = 704 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 640/2 - \sqrt{(640/2)^2 + (213)^2} = -64 \text{ kg/cm}^2$$

Estas tensiones se producen en planos definidos por la ecuación (3) del Problema 7 del Capítulo 15:

$$\text{tg } 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{\tfrac{1}{2}\sigma_x} = -\frac{213}{640/2} = -0{,}6656 \quad \text{y} \quad \theta_p = 73°10', \ 163°10'$$

Haciendo $\theta = 73°10'$ en la ecuación (1) del Problema 7 del Capítulo 15, tenemos

$$\sigma_n = 640/2 - (640/2) \cos 146°20' + 213 \text{ sen } 146°20' = 704 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, la tensión de tracción máxima es 704 kg/cm² y se produce en un plano a 73°10' con el eje geométrico del árbol. La otra tensión principal $(\sigma_n)_{min} = -64$ kg/cm² tiene lugar en un plano a 163°10' con el eje.

La máxima tensión cortante está dada por la ecuación (8) del Problema 7 del Capítulo 15. Es

$$\tau = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{(640/2)^2 + (213)^2} = \pm 384 \text{ kg/cm}^2$$

Esta tensión se produce en planos orientados a 45° con los hallados antes, en los que se producen las tensiones principales.

11. El árbol representado en la Fig. (a) gira con velocidad angular constante. El efecto de la correa crea un estado de torsión y flexión combinadas. Despreciar los pesos del árbol y las poleas y suponer que los apoyos pueden ejercer solo fuerzas aisladas de reacción. El diámetro del árbol es de 3 cm. Determinar las tensiones principales.

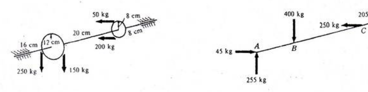
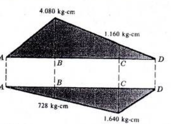


Fig. (a) Fig. (b)

Las fuerzas transversales que actúan en el árbol no son paralelas y los momentos flectores que producen deben sumarse vectorialmente para obtener el momento flector resultante. Esta suma vectorial solo es necesaria en algunos puntos que parezcan críticos a lo largo del árbol. En la Fig. (*b*) anterior se han representado las cargas que producen flexión junto con las reacciones que originan, considerando que pasan por el eje del árbol.

En la parte superior sombreada de la figura adjunta aparece el diagrama de momentos flectores en un plano vertical. En la inferior se ha representado el correspondiente a un plano horizontal.



El momento flector resultante en B es $M_B = \sqrt{(4.080)^2 + (728)^2} = 4.140$ kg-cm.

El momento flector resultante en C es $M_C = \sqrt{(1.160)^2 + (1.636)^2} = 2.000$ kg-cm.

El momento torsor entre las dos poleas es constante e igual a

$$T = (200 - 50)8 = 1.200 \text{ kg/cm}^2$$

Como el par torsor es el mismo en B y en C, el elemento crítico está en las fibras extremas del árbol en el punto B. La tensión máxima de flexión está dada por

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{(4.140)(3/2)}{\pi(3)^4/64} = 1.560 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión cortante máxima, que se produce en las fibras extremas del árbol, está dada por

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{1.200(3/2)}{\pi(3)^4/32} = 225 \text{ kg/cm}^2$$

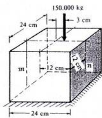
En el Problema 7 del Capítulo 15 se halló que las tensiones principales son

$$(\sigma_n)_{max} = \tfrac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 1.560/2 + \sqrt{(1.560/2)^2 + (225)^2} = 1.590 \text{ kg/cm}^2$$

$$(\sigma_n)_{min} = \tfrac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2} = 1.560/2 - \sqrt{(1.560/2)^2 + (225)^2} = -30 \text{ kg/cm}^2$$

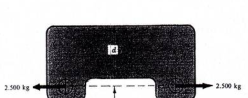
PROBLEMAS PROPUESTOS

12. Un taco corto está cargado con una fuerza de compresión de 150.000 kg. La fuerza está aplicada con una excentricidad de 3 cm, como se indica en la figura adjunta. El taco tiene 24 cm por 24 cm de sección. Determinar las tensiones en las fibras extremas m y n.
Sol. $\sigma_m = -65$ kg/cm², $\sigma_n = -455$ kg/cm²



13. En el Problema 12, ¿qué excentricidad puede existir si la tensión resultante en la fibra m ha de ser nula? *Sol.* 4 cm

14. El elemento representado en la Fig. (*a*) de la página siguiente está sometido a una carga de 2.500 kg aplicada excéntricamente. Si la tensión de trabajo admisible del material es de 750 kg/cm², determinar la anchura d del elemento. El espesor es de 2 cm. *Sol.* 7,3 cm



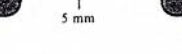


Fig. (*a*) Prob. 14

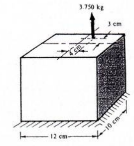


Fig. (*b*) Prob. 15

15. Un bloque está cargado con una fuerza de tracción excéntrica, como se ve en la Fig. (*b*). Determinar la tensión de tracción máxima. *Sol.* 150 kg/cm²

16. Un cilindro de pared delgada tiene 25 cm de diámetro y 2,5 mm de espesor de pared. El cilindro está sometido a una presión interna uniforme de 7 kg/cm². ¿Qué tracción axial adicional puede actuar simultáneamente de modo que la tensión máxima de tracción no exceda de 1.400 kg/cm²? *Sol.* 24.050 kg

17. Para el tubo de pared delgada del Problema 16 determinar la tensión normal que actúa en un plano inclinado 30° respecto a una generatriz. La tracción axial y la presión interna actúan simultáneamente. *Sol.* 612 kg/cm²

18. Una envuelta cilíndrica delgada está sometida a una compresión axial de 25.000 kg junto con un momento torsor de 30.000 kg-cm. El diámetro del cilindro es de 24 cm y el espesor de pared 3 mm. Determinar las tensiones principales en la envuelta. Hallar también la tensión cortante máxima. Despreciar la posibilidad de pandeo en la envuelta. *Sol.* $(\sigma_n)_{max} = 10$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -1.115$ kg/cm², $\tau = 560$ kg/cm²

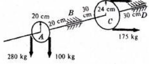
19. Un árbol de 6,50 cm de diámetro está sometido a una tracción axial de 20.000 kg junto con un momento torsor de 35.000 kg-cm. Determinar las tensiones principales en el árbol. Hallar también la tensión cortante máxima. *Sol.* $(\sigma_n)_{max} = 1.015$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -415$ kg/cm², $\tau = 715$ kg/cm²

20. Un árbol de 6 cm de diámetro está sometido a una tracción axial de 12.000 kg así como a un momento torsor de 30.000 kg-cm. Determinar las tensiones principales en el árbol.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 950$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -525$ kg/cm²

21. Un árbol de 16 cm de diámetro está sometido a una compresión axial de 75.000 kg y a un momento torsor de 250.000 kg-cm. Determinar las tensiones principales en el árbol y la tensión cortante máxima.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 175$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -550$ kg/cm², $\tau = 360$ kg/cm²

22. Considerar un árbol circular macizo sometido a un momento torsor de 20.000 kg-cm junto con un momento flector de 30.000 kg-cm. El diámetro del árbol es de 6 cm. Determinar las tensiones principales y la tensión cortante máxima en el árbol. *Sol.* $(\sigma_n)_{max} = 1.560$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -140$ kg/cm², $\tau = 850$ kg/cm²

23. El árbol que se representa gira con velocidad angular constante y está sometido a momento flector y torsión combinados, debido a los efectos de las correas indicados. Se pueden despreciar los pesos del árbol y de las poleas y los apoyos solo pueden ejercer fuerzas aisladas de reacción. El diámetro del árbol es de 3,5 cm. Determinar las tensiones principales.
Sol. $(\sigma_n)_{max} = 2.085$ kg/cm², $(\sigma_n)_{min} = -88$ kg/cm²

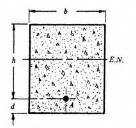


CAPITULO 17

Hormigón armado

INTRODUCCION. En los capítulos anteriores hemos tratado el problema de las tensiones y deformaciones en algunos tipos de elementos estructurales sometidos a diversas solicitaciones. En todos los problemas que trataban de vigas y soportes en particular se ha supuesto que el elemento estaba hecho de un solo material uniforme. A veces es conveniente combinar dos materiales para obtener un diseño que se acerque más al óptimo. Esto se hace frecuentemente en el caso del hormigón armado con acero, y a veces con las secciones de madera reforzada con chapas de acero. Aquí solo estudiaremos el primer caso, aunque los mismos principios básicos se aplican a los dos.

NATURALEZA DE LAS SECCIONES DE HORMIGON ARMADO. Por definición, el hormigón es una mezcla de cemento portland, árido fino, árido grueso y agua. El hormigón en masa es frágil y poco resistente a la tracción, por lo que solo es útil para elementos relativamente gruesos sometidos a compresión. La resistencia a tracción del hormigón es alrededor de 1/10 de su resistencia a compresión, por cuya causa, si se hiciera una viga de hormigón, el fallo se produciría a tracción para valores bastante bajos de carga y tensión. Esa viga se puede reforzar añadiéndole barras de acero en el lado sometido a tracción. La sección tiene entonces el aspecto representado en la figura adjunta. Como el hormigón se adhiere al acero muy bien no se produce deslizamiento de las barras de acero respecto al hormigón durante la flexión de la viga.



NATURALEZA DE LA ARMADURA. La armadura para el hormigón consiste generalmente en varillas de acero, redondas o cuadradas. En U. S. A. la variación es de 1/4 a 1 pulgada en las redondas y de 1/2 a $1\frac{1}{4}$ pulgadas de lado las cuadradas. El Comité Europeo del Hormigón recomienda una serie normalizada de diámetros para las barras redondas, que va siendo adoptada por numerosos países, entre ellos España, y es la siguiente:

5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32 y 40 mm

estando admitido también el 14.

DISTRIBUCION DE CARGAS ENTRE ACERO Y HORMIGON. Para calcular las tensiones de flexión en las vigas de hormigón armado es costumbre suponer que toda la tracción la resiste el acero y toda la compresión, el hormigón.

RELACIONES TENSION-DEFORMACION PARA EL HORMIGON. La curva tensión-deformación del hormigón es la representada en la Fig. 5*b* del Capítulo 1. Evidentemente, es una relación no lineal, por lo que el módulo de elasticidad no es constante. Sin embargo, en interés de la sencillez se supone generalmente que para el hormigón se aplica la ley de Hooke. En la curva tensión-deformación se ve inmediatamente que el módulo de elasticidad decrece con un aumento de la tensión. Se tiene parcialmente en cuenta esta variabilidad, empleando un valor inferior al obtenido por ensayos de compresión a tensiones de compresión pequeñas.

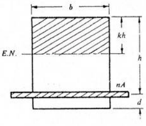
VALORES DEL MODULO DE ELASTICIDAD. El módulo de elasticidad a compresión

del hormigón varía desde $1{,}4 \times 10^5$ kg/cm² hasta $3{,}5 \times 10^5$ kg/cm². El módulo de elasticidad del acero de refuerzo es $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², por lo que podemos hallar la relación de los módulos del acero y del hormigón. Esa relación se representa por n y es

$$n = E_a/E_b$$

donde E_a indica el módulo de elasticidad del acero y E_b el del hormigón. Evidentemente, la relación n varía desde 15 a 6 empleándose comúnmente los valores 10 y 15.

SECCION TRANSFORMADA. La sección verdadera de una viga de hormigón armado con acero tiene el aspecto representado antes. Hay que recordar que los módulos de elasticidad del acero y el hormigón son completamente diferentes. Para facilitar el estudio se suele transformar la sección del acero A en una sección de hormigón nA, que es equivalente respecto a las propiedades elásticas. La sección transformada tiene el aspecto que se indica en la figura adjunta, en la que se ha sustituido el acero por una sección de hormigón igual a nA, que se representa por el rectángulo horizontal estrecho rayado. Se puede considerar que este hormigón tiene el mismo módulo que el de la zona de compresión, pero difiere de él en su supuesta aptitud para resistir tracción. En realidad, en esta figura las zonas rayadas representan la parte eficaz de la sección y el eje neutro se representa por E.N.



SITUACION DEL EJE NEUTRO. El eje neutro, representado por E.N. en la figura anterior, se determina igualando los momentos de las áreas por encima y por debajo de dicho eje respecto a él. Esto es, el momento estático de la zona de compresión por encima del eje es igual al momento estático de la sección transformada que soporta tracción debajo del eje. Hay que observar que en este cálculo se usa la sección transformada. En los Problemas 2, 3, 5-11 se encuentran ejemplos de la determinación de la posición del eje neutro.

COLOCACION DE LA ARMADURA. Para proteger el acero de los daños del fuego no se suele colocar la armadura a menos de 4 cm de la superficie expuesta. En la primera de las figuras anteriores se ha indicado esta distancia representándola por el símbolo d.

NOTACION. Los símbolos usados en este capítulo son algunas veces algo diferentes de los que aparecen en el resto del libro. Son parte de los empleados en las normas vigentes en España, las del Comité Europeo del Hormigón o el Joint Commitee on Standard Specifications for Concrete and Reinforced Concrete, de uso frecuente. Aunque no concuerden con las notaciones empleadas previamente en este libro, se usarán aquí para acostumbrar al estudiante a la terminología aceptada en el estudio y diseño del hormigón armado. Los símbolos empleados se definen como sigue:

σ_b' = tensión máxima de compresión en el hormigón

σ_a = tensión de tracción en el acero (supuesta constante en cualquier capa de acero de armadura)

A = sección de la armadura

b = anchura de la viga rectangular o anchura del alma de una viga T

h = altura útil de la viga, medida desde su cara superior al centro de la armadura

k = relación de la distancia entre las fibras extremas y el eje neutro a la altura útil

j = relación de la distancia entre las resultantes de las tensiones de compresión y tracción a la altura útil.

ARMADO EQUILIBRADO. Es raro que el mismo momento flector aplicado a una viga produzca simultáneamente la tensión de compresión admisible en el hormigón y la admisible de tracción en el acero. Frecuentemente, se alcanza la máxima tensión admisible en el hormigón, pero el acero no está sometido a su tensión de seguridad, o viceversa. Esto es antieconómico porque no se utiliza toda la resistencia del acero y el hormigón a la vez. Por el contrario, si se diseña la viga de modo que ambos estén sometidos simultáneamente a sus tensiones de trabajo admisibles se dice que tiene un *armado equilibrado*. Esto se logra ajustando el tamaño del hormigón y la sección del acero. Para ejemplos, véanse los Problemas 9-11.

EMPLEO DE TABLAS. Los problemas presentados en este capítulo se resuelven por aplicación directa de la ecuación de equilibrio. Existen numerosas tablas que facilitan la resolución de esos problemas y en la práctica se usan frecuentemente. Para un estudio detallado de su empleo se envía al lector a los textos más avanzados sobre diseño del hormigón armado.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una viga de hormigón de sección rectangular de 25 × 45 cm está armada con tres barras cuadradas de acero, cada una de 2 cm de lado. Las barras están situadas como se ve en la Fig. (*a*). Determinar la sección transformada equivalente. Los módulos de elasticidad del acero y del hormigón son $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y $1{,}4 \times 10^5$ kg/cm², respectivamente.

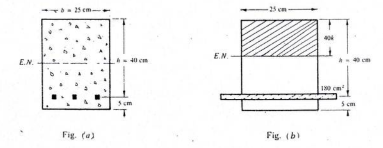


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

La relación de los módulos de elasticidad del acero y del hormigón, que se suele designar por n, es

$$n = \frac{E_a}{E_h} = \frac{2.1 \times 10^6}{1.4 \times 10^5} = 15$$

Transformando la sección de acero A en una de hormigón nA equivalente en cuanto a las propiedades elásticas se refiere, hallamos una sección de hormigón de $12(15) = 180$ cm². La sección transformada tiene el aspecto que aparece en la Figura (*b*).

Se puede considerar que esta sección transformada consta totalmente de hormigón de módulo $1{,}4 \times 10^5$ kg/cm². Obsérvese que solo debe considerarse como útil la zona sombreada; la parte superior resiste la compresión, y la inferior, la tracción. Así, hemos sustituido la armadura de acero original por una faja de hormigón de 180 cm² de área, que se supone es capaz de resistir tracción.

2. Determinar el eje neutro de la viga del Problema 1, armada con acero.

La distribución de tensiones de flexión (o normales) en la sección transformada sigue la ley lineal, pues las secciones planas permanecen planas durante la flexión y se supone que se cumple la ley de Hooke para el hormigón. Por consiguiente, el eje neutro coincidirá con el eje por el centro de gravedad de la sección transformada. Esto exige que el momento estático respecto al eje neutro, del área rayada por encima de dicho eje, sea igual al del área rayada situada debajo. Así, con referencia a la Fig. (*b*) del Problema 1 e introduciendo el símbolo k para designar la posición del eje neutro, tenemos

$$25(40k)(20k) = 180(40 - 40k) \quad \text{y} \quad k = 0{,}45$$

Por tanto, el eje neutro está $0{,}45(40) = 18$ cm por debajo de la cara superior de la viga.

3. Una viga de hormigón de sección en T tiene las dimensiones que se indican abajo. La viga está armada con tres barras de acero cuadradas, cada una de 2 cm de lado. Los módulos de elasticidad del acero y el hormigón son $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm² y $1{,}4 \times 10^5$ kg/cm², respectivamente. Determinar la posición del eje neutro.

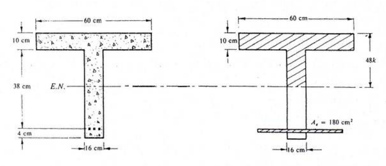


Fig. (*a*) Fig. (*b*)

Primero se determina la sección transformada. Se sustituye el acero por una sección de hormigón nA, donde $n = 15$ y $A = 12$ cm². La sección de hormigón equivalente A_e es, pues, 180 cm². A la derecha se representa la sección transformada.

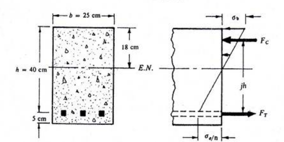
Igualando los momentos estáticos de las zonas rayadas, respecto al eje neutro, tenemos

$$60(10)(48k - 5) + (48k - 10)\left(\frac{48k - 10}{2}\right)(16) = 180(48 - 48k) \quad \text{y} \quad k = 0{,}306$$

Por tanto, el eje neutro está $0{,}306(48) = 14{,}7$ cm por debajo de la cara superior de la viga.

4. Una viga de hormigón armado tiene la sección rectangular representada más abajo. La armadura consiste en tres barras cuadradas de acero, cada una de 2 cm de lado. La viga está sometida a un momento flector de 250.000 kg-cm. Determinar la tensión máxima en el hormigón y en el acero. Tomar $n = 15$.

Utilizaremos la notación dada al principio del capítulo. En ella, σ_b' representa la tensión de compresión máxima en el hormigón y σ_a la tensión de tracción en el acero.



En el Problema 2 se ha hallado ya que el eje neutro de esta sección está 18 cm por debajo de la cara superior de la viga. La tensión media en la zona por encima del eje neutro es $\sigma_b'/2$, por lo que la fuerza de compresión total en el hormigón, representada por el vector F_C en la figura de arriba, es

$$F_C = (\sigma_b/2)(25)(18)$$

La fuerza F_C está aplicada en el centro de gravedad del triángulo, o sea, a 18/3 cm de la cara superior de la viga. La fuerza de tracción en el acero es $F_T = \sigma_a A$, y como en la viga no actúan fuerzas axiales, tenemos $F_T = F_C$, por lo que estas fuerzas forman un par. La distancia entre ellas se representa por jh, donde h es la altura útil de la viga, en este caso 40 cm, y j es una fracción. Así,

$$40j = 40 - 18/3 \quad \text{y} \quad j = 0{,}85$$

El brazo del momento es, pues, $jh = 0{,}85(40) = 34$ cm.

Por tanto, el momento resistente de la viga es $(\sigma_b/2)(25)(18)(34)$ kg-cm y debe ser igual al momento aplicado de 250.000 kg-cm, por lo que

$$250.000 = (\sigma_b'/2)(25)(18)(34) \quad \text{y} \quad \sigma_b' = 32{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

También puede expresarse el momento resistente en función de la tensión en el acero, en la forma

$$F_T \cdot jh = (\sigma_a \cdot A)jh$$

y esta expresión debe ser igual al momento aplicado de 250.000 kg-cm. Así,

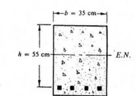
$$250.000 = \sigma_a(12)(34) \quad \text{y} \quad \sigma_a = 610 \text{ kg/cm}^2$$

Como comprobación, tenemos

$$F_C = 16{,}3(25)(18) = 7.340 \text{ kg}, \qquad F_T = 610(12) = 7.340 \text{ kg}$$

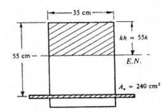
que es, indudablemente, una condición necesaria.

5. Una viga de hormigón armado tiene la sección rectangular representada en la figura adjunta. La armadura consiste en cuatro barras cuadradas de acero, cada una de 2 cm de lado. Si la tensión de trabajo admisible en el hormigón es de 50 kg/cm² y la del acero 1.100 kg/cm², determinar el momento flector máximo que se puede aplicar a la viga. Tomar $n = 15$.



La sección transformada tiene el aspecto indicado en la figura de la página siguiente. En ella, se ha sustituido la armadura por una sección de hormigón equivalente: $A_e = nA = 15(16) = 240$ cm². Igualando los momentos de las áreas respecto al eje neutro, tenemos

$$35(55k)(27,5k) = 240(55 - 55k) \quad \text{y} \quad k = 0,39$$



El eje neutro está, pues, 0,39(55) = 21,5 cm por debajo de la cara superior de la viga.

Determinaremos dos valores del momento flector, uno basado en la hipótesis de que el hormigón está tensionado a su valor máximo de 50 kg/cm², y el otro suponiendo que el acero está sometido a 1.100 kg/cm². El momento flector buscado es el menor de estos dos valores.

Si el hormigón está sometido a su tensión de trabajo admisible de 50 kg/cm², la tensión media en el hormigón es de 50/2 = 25 kg/cm², pues las tensiones normales varían linealmente de 50 kg/cm² en las fibras superiores hasta cero en el eje neutro. La fuerza total de compresión en el hormigón es, pues, $F_C = 25(35)(21,5) = 18.800$ kg. Como esta fuerza resultante actúa en el centro de gravedad de un triángulo (véase el Problema 4) está situada a la distancia 21,5/3 = 7,17 cm por debajo de la cara superior de la viga. La distancia entre la línea de acción de F_C y la tracción en el acero es de (55 − 7,17) = 47,83 cm. El momento resistente basado en la tensión en el hormigón es

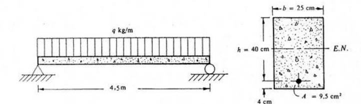
$$M_b = 18.800(47,83) = 900.000 \text{ kg-cm}$$

Si el acero está sometido a su tensión de trabajo admisible de 1.100 kg/cm², la fuerza total de tracción en el acero es $F_T = 1.100(16) = 17.600$ kg. El momento resistente basado en la tensión en el acero es

$$M_a = 17.600(47,83) = 842.000 \text{ kg-cm}$$

El momento flector admisible es el menor de estos dos valores, o sea, 842.000 kg-cm.

6. Una viga de hormigón armado de 4,5 m de longitud está apoyada en los extremos y tiene la sección rectangular representada más abajo. Las tensiones admisibles son 56 kg/cm² en el hormigón y 1.250 kg/cm² en el acero. Tomar $n = 12$ y suponer que el peso del hormigón es de 2.400 kg/m³. Determinar la intensidad máxima de carga uniforme q que puede soportar la viga en toda su longitud.



Como en el Problema 1, se sustituye la armadura de acero por una sección de hormigón equivalente A_e, donde

$$A_e = n \cdot A = 12(9,5) = 114 \text{ cm}^2$$

Se puede imaginar esta sección equivalente de hormigón como una banda horizontal situada 40 cm por debajo de la cara superior de la viga. Ahora determinamos el eje neutro igualando los momentos de las áreas respecto al eje, es decir,

$$25(40k)(20k) = 114(40 - 40k) \quad \text{y} \quad k = 0,377$$

El eje neutro está, pues, 0,377(40) = 15 cm por debajo de la cara superior de la viga.

Determinaremos dos valores del momento flector, uno basado en la hipótesis de estar el hormigón sometido a una tensión de 56 kg/cm², y el otro en la suposición de que el acero está sometido a 1.250 kg/cm². El momento flector admisible es el menor de esos dos valores.

Si el hormigón está sometido a 56 kg/cm², la fuerza total de compresión en él es

$$F_C = 28(25)(15) = 10.500 \text{ kg}$$

La distancia entre la línea de acción de esta fuerza y la del acero es 40 − 15/3 = 35 cm. El momento resistente basado en la tensión en el hormigón es, pues,

$$M_b = 10.500(35) = 367.500 \text{ kg-cm}$$

Si el acero está sometido a 1.250 kg/cm² la fuerza de tracción total en él es F_T = 1.250(9,5) = 11.875 kg. El momento resistente basado en la tensión en el acero es

$$M_a = 11.875(35) = 415.625 \text{ kg-cm}$$

El momento admisible es, pues, 367.500 kg-cm.

En el Problema 6 del Capítulo 6 se estudió el diagrama de momentos flectores para este tipo de solicitación. Según se vio allí, el momento es máximo en el centro del vano y está dado por

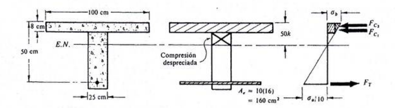
$$M_{max} = pL^2/8$$

donde p expresa la carga total por unidad de longitud de viga y L la longitud de la misma. El peso de la viga es apreciable y se incluye en p. Dicho peso por metro de longitud es $\dfrac{(25)(44)}{10.000}(1)(2.400) = 264$ kg. Es costumbre considerar una densidad media del hormigón armado, teniendo en cuenta la del hormigón y el acero.

Sustituyendo en la expresión de M_{max} anterior,

$$\frac{367.500}{100} = \frac{(264 + q)(4,5)^2}{8} \quad \text{y} \quad q = 1.185 \text{ kg/m}$$

7. Una viga de hormigón de sección T tiene las dimensiones indicadas más abajo. La armadura consiste en 16 cm² de acero. En la sección actúa un momento flector de 720.000 kg-cm. Determinar la tensión máxima en el hormigón así como la tensión en el acero. Tomar n = 10.



En la figura central se muestra la sección transformada. La compresión en la parte vertical bajo el ala es muy pequeña comparada con la del ala y se despreciará. Hallaremos la posición del eje neutro considerando la igualdad de los momentos de las áreas rayadas:

$$100(8)(50k - 4) = 160(50 - 50k) \quad \text{y} \quad k = 0,233$$

El eje neutro está, pues, 0,233(50) = 11,65 cm por debajo de la cara superior de la viga.

En la figura de la derecha se representa la variación de las tensiones de flexión. La tensión de compresión en el borde inferior del ala horizontal es $(3,65/11,65)\sigma_b' = 0,313\sigma_b'$. Se puede considerar que la fuerza de compresión total en el ala es la suma de dos fuerzas: F_{C1} que actúa con una intensidad uniforme de $0,313\sigma_b'$ sobre el ala y F_{C2} que actúa con una intensidad que varía de 0 a $0,687\sigma_b'$. La fuerza F_{C1} actúa en el centro del ala, a 46 cm del acero, y la F_{C2} a la distancia de 47,33 cm de él. La fuerza F_T en el acero puede considerarse constituida por dos fuerzas

$F_{T1} = F_{C1}$ y $F_{T2} = F_{C2}$, donde $F_T = F_{T1} + F_{T2}$. Así, tenemos que actúan dos pares. El momento resistente correspondiente a F_{C1} es

$$(0{,}313\sigma_b')(8)(100)(46) = 11.520\sigma_b'$$

El momento resistente correspondiente a F_{C2} es

$$(0{,}343\sigma_b')(8)(100)(47{,}33) = 13.000\sigma_b'$$

El momento resistente total es la suma de los dos, o sea, $24.520\sigma_b'$.

Como el momento resistente es igual al flector, tenemos

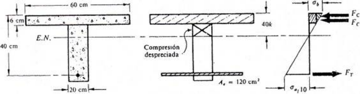
$$24.520\sigma_b' = 720.000 \quad \text{y} \quad \sigma_b' = 29{,}4 \text{ kg/cm}^2$$

La fuerza de compresión total está dada por la suma

$$[0{,}313(8)(100)(29{,}4) + 0{,}343(8)(100)(29{,}4)] = 15.400 \text{ kg}$$

Es igual a la fuerza de tracción F_T que actúa en el acero. Por consiguiente, la tensión de tracción en el acero es $15.400/16 = 960$ kg/cm².

8. Una viga de hormigón de sección T tiene las dimensiones indicadas en la figura. La armadura consiste en 12 cm² de acero. Determinar el máximo momento flector que puede soportar la viga. Las tensiones admisibles son $\sigma_a = 1.400$ kg/cm² y $\sigma'_b = 95$ kg/cm². Tomar $n = 10$.



En la figura central se muestra la sección transformada. Se desprecia la compresión en el alma. El eje neutro se determina por la ecuación:

$$(60)(6)(40k - 3) = 120(40 - 40k) \quad \text{y} \quad k = 0{,}308$$

El eje neutro está, pues, $0{,}308(40) = 12{,}32$ cm por debajo de la cara superior de la viga.

La tensión de compresión en las fibras extremas de la viga se representa por σ_b', por lo que la tensión en el borde inferior del ala es $(6{,}32/12{,}32)\sigma_b' = 0{,}513\sigma_b'$. Como en el Problema 7, la compresión total F_C en el ala está compuesta de una fuerza F_{C1} que actúa con intensidad uniforme en ella, junto con una fuerza F_{C2} que varía linealmente en la profundidad de ésta. La fuerza F_{C1} está dada por

$$F_{C1} = (0{,}513\sigma_b')(60)(6) = 185\sigma_b'$$

La fuerza F_{C2} vale

$$F_{C2} = (0{,}243\sigma_b')(60)(6) = 87{,}5\sigma_b'$$

La compresión total F_C en el hormigón es la suma de ambas, o sea, $272{,}5\sigma_b'$. La fuerza F_{C1} actúa en el centro del ala, a 37 cm del acero, y F_{C2} a 38 cm de él. Por tanto, el momento resultante es igual a la suma:

$$\begin{aligned}(185\sigma_b')(37) &= 6.845\sigma_b' \\ (87{,}5\sigma_b')(38) &= \underline{3.325\sigma_b'} \\ & 10.170\sigma_b' = \text{momento resistente}\end{aligned}$$

El brazo del momento de la compresión resultante en el hormigón es, pues, $(10.170\sigma_b')/(272{,}5\sigma_b') = 37{,}3$ cm.

Si el hormigón está sometido a su tensión máxima admisible de 95 kg/cm², será

$$F_C = 272{,}5(95) = 25.900 \text{ kg}$$

Si el acero está sometido a su máximo valor admisible de tensión 1.400 kg/cm², la fuerza de tracción está dada por

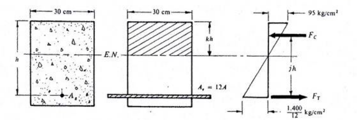
$$F_T = 1.400(12) = 16.800 \text{ kg}$$

Este es el menor de los dos valores y determina el momento flector máximo, cuyo valor es de 16.800(37,3) = 62.660 kg-cm.

9. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular que resista un momento flector de 700.000 kg-cm. Las tensiones admisibles son 1.400 kg/cm² en el acero y 95 kg/cm² en el hormigón. Tomar $n = 12$. La anchura de la viga debe ser de 30 cm.

Como puede verse en el Problema 5, el momento flector que produce la máxima tensión admisible en el hormigón no somete necesariamente al acero a su máxima tensión admisible. Desde el punto de vista económico, es de desear que dichos valores máximos se produzcan a la vez para los dos materiales. En ese caso se dice que la viga tiene un «armado equilibrado».

Más abajo se representan la sección de la viga y la transformada. El problema consiste en determinar h y A de modo que las tensiones admisibles se produzcan simultáneamente. Esto es, que la tensión en el hormigón equi-



valente que ha sustituido al acero sea 1.400/12 kg/cm² al mismo tiempo que la tensión de compresión en el hormigón es de 95 kg/cm². De la distribución de tensiones representada más arriba tenemos, por semejanza de triángulos:

$$\frac{95}{kh} = \frac{1.400/12}{h - kh} \quad \text{y} \quad k = 0{,}448$$

La distancia entre las fuerzas F_C y F_T es, pues, $(h - 0{,}448h/3) = 0{,}850h$. La fuerza total de compresión en el hormigón es

$$F_C = (95/2)(0{,}448h)(30) = 638h$$

Por tanto, el momento resistente es $(0{,}850h)(638h) = 542h^2$, que debe ser igual al momento flector, por lo que

$$542h^2 = 700.000 \quad \text{y} \quad h = 36 \text{ cm}$$

La compresión en el hormigón es, por tanto, $F_C = 638(36) = 23.000$ kg que es igual también a la fuerza de tracción en el acero. El área del acero es

$$A = 23.000/1.400 = 16{,}4 \text{ cm}^2$$

10. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular que ha de soportar un momento flector de 400.000 kg-cm. Las tensiones admisibles son de 1.250 kg/cm² en el acero y 50 kg/cm² en el hormigón. Tomar $n = 10$. La altura debe ser doble de la anchura.

Este es otro problema referente a «armado equilibrado». Las tensiones admisibles en el acero y en el hor-

migón deben producirse simultáneamente y tener, por tanto, la distribución de tensiones representada en la figura. Por semejanza de triángulos

$$\frac{50}{kh} = \frac{1.250/10}{h - kh} \quad \text{y} \quad k = 0{,}286$$

La distancia entre las fuerzas F_C y F_T es, pues, $(h - 0{,}286h/3) = 0{,}905h$. La fuerza total de compresión en el hormigón es

$$F_C = (50/2)(b)(0{,}286h) = 7{,}15bh$$

El momento resistente es $(7{,}15bh)(0{,}905h) = 6{,}47bh^2$, que debe ser igual al momento flector. Así,

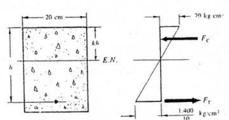
$$6{,}47bh^2 = 400.000, \text{ siendo } h = 2b. \qquad \text{Despejando, } b = 25 \text{ cm}, \; h = 50 \text{ cm}$$

La compresión en el hormigón es, por tanto, $F_C = (7{,}15)(25)(50) = 8.940$ kg. Como es igual a la fuerza de tracción del acero, la sección de acero necesaria es

$$A = 8.940/1.250 = 7{,}15 \text{ cm}^2$$

11. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular que ha de soportar una carga aislada de 5.000 kg en el centro de un vano de 4 m. Las tensiones admisibles son 1.400 kg/cm² en el acero y 70 kg/cm² en el hormigón. Tomar $n = 10$. La anchura de la viga debe ser de 20 cm y el hormigón debe recubrir 5 cm por debajo al acero. El hormigón pesa 2.400 kg/m³.

También ahora es más económico usar un «armado equilibrado». Las tensiones admisibles deben producirse simultáneamente en el centro del vano, donde tenemos la distribución de tensiones representada en la figura adjunta. Por semejanza de triángulos,



$$\frac{70}{kh} = \frac{1.400/10}{h - kh} \quad \text{y} \quad k = 0{,}333$$

La distancia entre las fuerzas F_C y F_T es, por tanto, $(h - 0{,}333h/3) = 0{,}889h$. La fuerza total de compresión en el hormigón es

$$F_C = (70/2)(20)(0{,}333h) = 233h$$

El momento resistente es $(233h)(0{,}889h) = 207h^2$. Por la simetría de la carga, este momento máximo tiene lugar en el centro del vano.

El momento flector en el centro del vano se debe a la carga aislada de 5.000 kg y al peso propio de la viga. Debido a la carga aislada, tenemos un momento flector de $5.000(4)/4 = 5.000$ kg-m $= 500.000$ kg-cm en dicho punto. Debido al peso propio, el momento es

$$M_1 = pL^2/8$$

según el Problema 6 del Capítulo 6. Aquí, p representa el peso de la viga por unidad de longitud. Así,

$$p = \frac{20(h + 5)}{10.000}(1)(2.400) = 4{,}8(h + 5)$$

y

$$M_1 = \frac{4{,}8(h + 5)(4)^2}{8} = 9{,}6(h + 5) \text{ kg-m} = 960(h + 5) \text{ kg-cm}$$

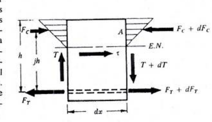
Igualando el momento resistente en el centro del vano al momento flector en ese punto, tenemos

$$207h^2 = 500.000 + 960(h + 5) \quad \text{y} \quad h = 51{,}75 \text{ cm}$$

La compresión en el hormigón es, por tanto, $F_C = 233(51{,}75) = 12.060$ kg. Como es igual a la fuerza de tracción en el acero, la sección de acero necesaria es $A = 12.060/1.400 = 8{,}6$ cm².

12. Una viga de hormigón armado tiene sección rectangular y anchura b. La altura desde la cara superior a la armadura de acero es h y dicha armadura consiste en barras con sección total A. Determinar la tensión cortante máxima en la viga y en la superficie de las barras.

La tensión cortante en un plano horizontal por la viga se determina por las mismas consideraciones hechas en el Problema 21 del Capítulo 8. Según las conclusiones obtenidas allí, la tensión cortante máxima actuará en la superficie neutra de la viga. Esta tensión cortante se representa por τ. En la figura adjunta se representan las fuerzas que actúan en dos secciones contiguas. El incremento de compresión en el hormigón entre esas dos secciones se expresa por dF_C. Por consiguiente, la tensión cortante τ en la superficie neutra se halla de las condiciones de equilibrio horizontal en la parte de encima del eje neutro:



$$\tau \ b \cdot dx = dF_C \qquad \text{y} \qquad \tau = \frac{1}{b} \cdot \frac{dF_C}{dx}$$

donde b representa la anchura de la viga. Pero el momento resistente está dado por $M = F_C \cdot jh$, de donde $\frac{1}{jh} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{dF_C}{dx}$. Sustituyendo,

$$\tau = \frac{1}{jbh} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{T}{jbh}$$

donde T indica el esfuerzo cortante transversal.

Ahora, sumando momentos respecto al punto A (en la línea de acción de las fuerzas F_C y $F_C + dF_C$),

$$T \cdot dx + F_T \cdot jh - (F_T + dF_T)jh = 0 \qquad \text{y} \qquad dF_T = \frac{Tdx}{jh}$$

Pero este incremento de la tracción en el acero es igual a las fuerzas de cortadura repartidas sobre las superficies de las barras de la armadura. Si p representa la suma de los perímetros de las barras, la tensión cortante en su superficie (representada por τ_a) está dada por

$$\tau_a = \frac{dF_T}{p\,dx} = \frac{T}{jhp}$$

Generalmente, se le llama tensión de adherencia.

13. Considerar una viga de hormigón armado de sección rectangular en la que $b = 25$ cm, $h = 40$ cm y la armadura consiste en tres barras de acero cuadradas, cada una de 2 cm de lado. El esfuerzo cortante máximo es 3.500 kg. Determinar la tensión cortante máxima en la viga y la tensión de adherencia entre el acero y el hormigón. Tomar $n = 15$.

En el Problema 12 se halló que la tensión cortante máxima, que se produce en el eje neutro, es

$$\tau = \frac{T}{jbh}$$

Esta misma sección se estudió en el Problema 2 y se halló que $k = 0{,}45$. Por tanto, $j = 1 - k/3 = 0{,}85$. Sustituyendo,

$$\tau = \frac{3.500}{0{,}85(25)(40)} = 4{,}1 \ \text{kg/cm}^2$$

La tensión de adherencia que actúa en la superficie de las barras de acero se vio en el Problema 12, que es

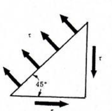
$$\tau_a = \frac{T}{jhp}$$

Aquí p representa la suma de los perímetros de las barras de la armadura, que en este caso es 24 cm. Sustituyendo,

$$\tau_a = \frac{3.500}{0{,}85(40)(24)} = 4{,}3 \ \text{kg cm}^2$$

14. Estudiar la tracción diagonal en una viga de hormigón armado. ¿Qué tipo de armadura se usará para evitar el fallo por tracción diagonal?

Como se dijo en el Problema 12, la tensión cortante horizontal máxima en esa viga se produce en la superficie neutra. Un elemento situado en esa superficie está sometido a cortante puro, pues las tensiones normales son nulas allí. Según el Problema 13 del Capítulo 15, es evidente que en un plano diagonal a 45° por el elemento existe una tensión de tracción de igual magnitud que la tensión cortante. Un elemento cortado a 45° con la dirección de la superficie neutra tiene el aspecto representado en la figura adjunta. Las tensiones normales en este plano a 45° se llaman tensiones de tracción diagonal u oblicua.



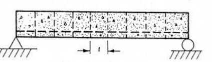
Como el hormigón es muy poco resistente a la tracción, esas tensiones de tracción producirían grietas en el hormigón, con posible destrucción de la viga, por lo que ésta debe reforzarse contra estas tensiones. Esa armadura es, además, de la utilizada para reforzar la parte inferior contra la tracción longitudinal. Indudablemente, el tipo de armadura más conveniente son las barras de acero en ángulo recto con la dirección de las grietas del hormigón. Sin embargo, a menudo se usan barras verticales, llamadas estribos, por ser más fácil colocarlas que las inclinadas.

Al calcular las tensiones que ha de resistir la armadura de tracción diagonal hay que observar que mientras que en la superficie neutra la tensión diagonal forma un ángulo de 45° con el plano horizontal de la viga, éste no es el caso en otros puntos de la misma. Un elemento de la viga está sometido generalmente a tensiones normal longitudinal y cortante, por lo que la dirección de la resultante no estará siempre a 45° con la horizóntal. Sin embargo, por razones de sencillez, se suele considerar que la tracción diagonal actúa a 45° en todos los puntos. Los estribos verticales resistirán las componentes verticales de esta tracción diagonal a 45°, y las componentes horizontales las resistirá la armadura longitudinal.

El hormigón puede resistir una tensión cortante de trabajo (y, por tanto, una tensión de tracción diagonal) igual a $0{,}03\sigma'_{br}$, siendo σ'_{br} la resistencia de rotura a compresión a los 28 días. La tensión de tracción diagonal τ' que toma el acero es, pues,

$$\tau' = \tau - 0{,}03\sigma'_{br}$$

Frecuentemente se supone que $\tau' = 2\tau/3$. Los estribos verticales tienen el aspecto indicado en la figura adjunta. La separación entre ellos se representa por t y la fuerza total admisible en un estribo por P. Para el equilibrio, tendremos



$$\tau' \cdot b \cdot t = P \qquad \text{y} \qquad t = \frac{P}{\tau' b}$$

que determina la separación entre estribos. El valor de P es igual al producto de la sección del estribo por la tensión de tracción admisible en él.

15. Una viga de hormigón armado de 25 cm de anchura y 35 cm de altura útil está sometida a un cortante transversal de 6.000 kg. ¿Cuál debe ser la separación de los estribos verticales de 10 mm de diámetro si se admite un co tante unitario de 3 kg/cm² en el hormigón y una tensión de tracción de 1.100 kg/cm² en los estribos?

Según el Problema 12, la tensión cortante máxima que se produce en la superficie neutra es

$$\tau = \frac{T}{jbh} = \frac{6.000}{(7/8)(25)(35)} = 8 \text{ kg/cm}^2$$

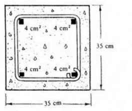
tomando un valor medio de $j = 7/8$, satisfactorio para todos los cálculos de cortantes.

La tracción diagonal que debe absorber el acero es, pues, $\tau' = 8 - 3 = 5$ kg/cm².

La fuerza admisible en un estribo de forma de U es $P = \frac{\pi}{4}(1)^2(2)(1.100) = 1.730$ kg.

Según el Problema 14, la separación t de los estribos es $t = \frac{P}{\tau' b} = \frac{1.730}{5(25)} = 13{,}8$ cm.

16. Determinar las tensiones axiales en el acero y en el hormigón del pilar representado en la figura. La carga axial es 60.000 kg y $n = 10$.



También ahora conviene utilizar el método de la sección equivalente. Los 16 cm² de acero se transforman en una sección de hormigón equivalente de 10(16) = 160 cm², con un aumento de sección de 144 cm². La sección útil de hormigón que hay que considerar ahora es (1.225 + 144) = 1.369 cm².

La tensión axial en el hormigón es 60.000/1.369 = 44 kg/cm² y en el acero 10(44) = 440 kg/cm².

El movimiento lateral de las varillas de acero se evita con cercos formados por barras redondas formando cuadrados que rodean la armadura, como se ve en la figura. Estos cercos van colocados a intervalos regulares en toda la longitud del pilar. Las distintas normas dan separaciones máximas entre cercos, como, por ejemplo, la del Joint Committee on Standard Specifications estipula que la separación máxima para cercos hechos con varilla de 1/4 de pulgada será de 12 pulgadas y la Instrucción Española determina que para cercos constituidos con redondos de diámetro $\geq \Phi g/4$, la separación máxima entre ellos será de 15 Φd (Φg y Φd son los diámetros de la barra más delgada y de la más gruesa que se hallan comprimidas).

17. Diseñar un pilar cuadrado de hormigón armado para soportar una carga aislada de 100.000 kg. La resistencia del hormigón a los 28 días es de 210 kg/cm² y la tensión de trabajo en el acero de 1.400 kg/cm². Tomar $n = 8$ y hacer que la sección del acero sea el 4 por 100 de la del hormigón.

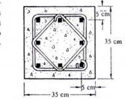
Utilizando la norma del Joint Committee on Standard Specifications para el hormigón armado, la carga admisible P en el pilar está dada por

$$P = 0{,}8(0{,}225\ f_c'\ Ag + f_s A_s)$$

donde f_c' = resistencia del hormigón a los 28 días (que hemos llamado σ_{br}')
A_g = sección total del hormigón (B_t en las normas europeas)
f_s = 40 por 100 del límite elástico del acero, que se suele tomar 1.400 kg/cm² para el acero duro
A_s = sección de la armadura de acero (que hemos llamado A).
Sustituyendo, $100.000 = 0{,}8[0{,}225(210)A_g + 1.400(0{,}04)A_g]$ y $A_g = 1.210$ cm².

Por tanto, una sección de hormigón aceptable es $\sqrt{1.210}$, o sea, 34,8 cm, o 35 cm de lado.

La sección de la armadura de acero es $A = 0{,}04(1.210) = 48{,}4$ cm². Esta sección se puede conseguir con 8 barras cuadradas de 2,5 cm de lado, que puedan disponerse de modo que la sección tenga el aspecto representado en la figura adjunta. En la práctica, hay que impedir que esas ocho varillas tengan movimiento lateral, por lo que se añaden cercos a intervalos iguales a lo largo del pilar. Estos cercos están formados por varillas de acero de menor diámetro, con la forma indicada en la figura.



PROBLEMAS PROPUESTOS

18. Una viga de hormigón armado tiene las dimensiones indicadas en la Fig. (*a*) de la página siguiente. La viga está armada con seis barras circulares de acero de 30 mm de diámetro cada una. Determinar la situación del eje neutro. Tomar $n = 15$. *Sol.* 37 cm por debajo de la cara superior de la viga.

19. Una viga de hormigón de sección T tiene las dimensiones indicadas en la Fig. (*b*) de la página siguiente. La viga está armada con tres barras circulares de 30 mm de diámetro cada una. Determinar la situación del eje neutro despreciando la compresión en el trozo de alma vertical por debajo del ala. Volverla a calcular tomando en cuenta esa compresión. Tomar $n = 15$.

Sol. 18,9 cm debajo de la cara superior de la viga. 18,8 cm debajo de la cara superior de la viga.

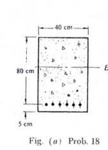


Fig. (*a*) Prob. 18

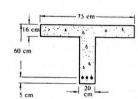


Fig. (*b*) Prob. 19

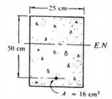


Fig. (*c*) Prob. 20

20. Una viga de hormigón rectangular tiene las dimensiones que se indican en la Fig. (*c*). La viga está armada con barras de acero con una sección total de 16 cm² y está sometida a un momento flector de 6.000 kg-m. Determinar la tensión máxima en el hormigón y la tensión en el acero. Tomar $n = 15$.
Sol. $\sigma_b' = 49{,}6$ kg/cm², $\sigma_a = 885$ kg/cm²

21. Una viga de hormigón armado de sección rectangular tiene una anchura de 20 cm, una altura útil h de 30 cm y el área total del acero de armadura es de 9 cm². Si la tensión de trabajo admisible en el hormigón es de 45 kg/cm² y la del acero 1.150 kg/cm², determinar el momento flector máximo que puede soportar la viga. Tomar $n = 15$.
Sol. 165.000 kg-cm.

22. Una viga de hormigón armado de 6 m de longitud está apoyada en sus extremos y tiene sección rectangular. La anchura es de 30 cm, la altura útil desde la cara superior a la armadura de acero, de 45 cm, el hormigón recubre la armadura 4 cm y la sección de acero es de 15 cm². Las tensiones admisibles son 50 kg/cm² en el hormigón y 1.100 kg/cm² en el acero. Considerar $n = 15$ y tomar 2.400 kg/m³ para peso del hormigón armado. Determinar la carga aislada máxima que se puede aplicar en el centro de la viga. *Sol.* 2.700 kg

23. Una viga de hormigón de sección T tiene las dimensiones indicadas en la figura adjunta. La armadura consiste en 18 cm² de acero. En la sección actúa un momento flector de 850.000 kg-cm. Determinar la tensión máxima en el hormigón y la tensión en el acero. Considerar $n = 10$.
Sol. $\sigma_b' = 36$ kg/cm², $\sigma_a = 1.140$ kg/cm²

10 cm
105 cm
45 cm
25 cm

24. Consideremos una sección T similar a la del Problema 23. La anchura del ala es de 70 cm y su altura 9 cm; la altura útil desde la cara superior de la viga hasta la armadura es de 80 cm. La armadura consiste en 45 cm² de acero. En la sección actúa un momento flector de 3.300.000 kg-cm. Determinar la tensión máxima en el hormigón y la tensión en el acero. Tomar $n = 10$. *Sol.* $\sigma_b = 80$ kg/cm², $\sigma_a = 970$ kg/cm²

25. Una viga T de hormigón tiene una anchura de ala de 100 cm, un espesor de la misma de 10 cm y una altura útil desde la cara superior a la armadura, de 65 cm. La armadura consiste en 13 cm² de acero. Determinar el momento flector máximo que puede soportar la viga. Las tensiones admisibles son $\sigma_a = 1.400$ kg/cm² y $\sigma_b' = 95$ kg/cm². Tomar $n = 15$. *Sol.* 1.105.000 kg-cm

26. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular que pueda soportar un momento flector de 350.000 kg-cm. Las tensiones admisibles son 1.250 kg/cm² en el acero y 60 kg/cm² en el hormigón. La anchura de la viga debe ser de 20 cm. Tomar $n = 15$. *Sol.* $h = 40{,}2$ cm, $A = 8{,}1$ cm²

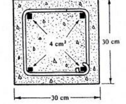
27. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular capaz de soportar un momento flector de 350.000 kg-cm. Las tensiones admisibles son 1.250 kg/cm² en el acero y 60 kg/cm² en el hormigón. La altura debe ser 1-1/2 veces la anchura. Tomar $n = 15$. *Sol.* $A = 8{,}96$ cm², $h = 36{,}5$ cm, $b = 24{,}3$ cm

28. Diseñar una viga de hormigón armado de sección rectangular capaz de soportar una carga uniforme de 1.200 kg/m². La viga tiene 6 m de longitud y 30 cm de anchura. Las tensiones admisibles son 1.250 kg/cm² en el

acero y 65 kg/cm² en el hormigón. Tomar $n = 12$. El hormigón debe recubrir 5 cm la armadura. El peso del hormigón armado es 2.400 kg/m³. *Sol.* $h = 55{,}3$ cm, $A = 18{,}8$ cm²

29. Una viga de hormigón armado de sección rectangular tiene una anchura $b = 40$ cm y una altura $h = 80$ cm desde la cara superior hasta la armadura. Esta armadura consiste en seis barras redondas de 30 mm de diámetro cada una. Tomar $n = 15$. El esfuerzo cortante transversal máximo es de 12.000 kg. Determinar la tensión cortante máxima en la viga y la de adherencia entre el acero y el hormigón. *Sol.* $\tau = 4{,}4$ kg/cm², $\tau_d = 3{,}1$ kg/cm²

30. Determinar la tensión axial en el acero y en el hormigón del pilar representado en la figura adjunta. La carga axial es de 60.000 kg y $n = 12$.
Sol. $\sigma_b = 55{,}8$ kg/cm², $\sigma_a = 657$ kg/cm²



31. Diseñar un pilar de hormigón armado cuadrado capaz de soportar una carga de 200.000 kg. La resistencia a 28 días del hormigón es 210 kg/cm² y la tensión de trabajo del acero, 1.400 kg/cm². Tomar $n = 8$ y hacer que la sección del acero sea el 3 por 100 de la total del hormigón.
Sol. Una sección cuadrada de 53 cm armada con 12 barras redondas de 30 mm de diámetro.

INDICE

Ediciones McGraw-Hill en Español

Incluye Textos Gregg y la serie Biblioteca Para El Hombre Actual

CIENCIA

Biología

De Coursey: **El Organismo Humano, 2a. ed.**

Pelczar y Reid: **Microbiología, 2a. ed.**

Weichert: **Elementos de Anatomía de los Cordados, 2a. ed.**

Física y Química

Beiser: **Conceptos de Física Moderna**

Bueche: **Fundamentos de Física**

Duffey: **Química Física**

Hamilton y Simpson: **Cálculos de Química Analítica, 6a. ed.**

Hansch y Helmkamp: **Sinopsis de Química Orgánica**

Oldenberg: **Introducción a la Física Atómica y Nuclear, 3a. ed.**

Reif: **Fundamentos de Física Estadística y Térmica**

Richards, Cram y Hammond: **Elementos de Química Orgánica**

Timm: **Química General, 4a. ed.**

Weber, et al.: **Física para Ciencia e Ingeniería, 1a. ed., revisada**

Wert y Thomson: **Física de los Sólidos**

White, et al.: **Principios de Bioquímica, 2a. ed.**

Geología, Metalurgia y Mineralogía

Avner: **Introducción a la Metalurgia Física**

Emmons, et al.: **Geología: Principios y Procesos, 5a. ed.**

Kerr: **Mineralogía Optica, 3a. ed.**

Kraus, et al.: **Mineralogía: Una Introducción al Estudio de Minerales y Cristales, 5a. ed.**

Matemáticas y Estadística

Allendoerfer y Oakley: **Fundamentos de Matemáticas Universitarias**

Allendoerfer y Oakley: **Introducción Moderna a la Matemática Superior**

Buck: **Cálculo Superior, 2a. ed.**

Churchill: **Series de Fourier y Problemas de Contorno, 2a. ed.**

Churchill: **Teoría de Funciones de Variable Compleja, 2a. ed.**

Dixon y Massey: **Introducción al Análisis Estadístico, 2a. ed.**

Ford y Ford: **Cálculo**

Grant: **Geometría Descriptiva Práctica, 2a. ed.**

Guenther: **Introducción a la Inferencia Estadística**

Johnson, et al.: **Explorando la Matemática, Tomos I-IV (para el nivel secundario)**

Kells: **Ecuaciones Diferenciales Elementales, 5a. ed.**

Pipes: **Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos, 2a. ed.**

Rees y Sparks: **Algebra y Trigonometría**

Rees y Sparks: **Algebra Intermedia, 3a. ed.**

Rice y Knight: **Matemáticas Técnicas, 2a. ed.**

Rios: **Métodos Estadísticos**

Rudin: **Principios de Análisis Matemático, 2a. ed.**

Schwartz: **Introducción al Estudio de Matrices y Vectores**

Warner y McNeary: **Geometría Descriptiva Aplicada, 5a. ed.**

Wylie: **Matemáticas Superiores para Ingeniería, 3a. ed. (en prensa)**

INGENIERIA

Electrónica e Ingeniería Eléctrica

Angelo: **Circuitos Electrónicos, 2a. ed.**

Brenner y Javid: **Análisis de Circuitos Eléctricos**

Chirlian: **Análisis y Diseño de Circuitos Electrónicos**

Cutler: **Análisis de Circuitos con Semiconductores**

Fitzgerald y Higginbotham: **Fundamentos de Ingeniería Eléctrica, 2a. ed.**

Fitzgerald y Higginbotham: **Fundamentos de Ingeniería Eléctrica y Electrónica**

Hammond: **Ingeniería Eléctrica**

Hayt y Kemmerly: **Análisis de Circuitos en Ingeniería**

Kip: **Fundamentos de Electricidad y Magnetismo**

Langsdorf: **Principios de Máquinas de Corriente Continua, 6a. ed.**

Langsdorf: **Teoría de las Máquinas de Corriente Alterna**

Lister: **Máquinas y Circuitos Eléctricos**

Meisel: **Principios de Conversión de Energía Electromecánica**

Millman y Taub: **Circuitos Digitales y de Pulsos**

Ryder: **Ingeniería Electrónica: Con Aplicaciones Industriales y Control**

Shrader: **Comunicación Electrónica, 2a. ed.**

Singer: **Fundamentos de Matemáticas para Electricidad y Electrónica, 2a. ed.**

Slurzberg y Osterheld: **Fundamentos de Electricidad-Electrónica, 3a. ed.**

Stevenson: **Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia, 2a. ed.**

Ingeniería Química

Badger y Banchero: **Introducción a la Ingeniería Química**

Mecánica e Ingeniería Mecánica

Beer y Johnson: **Mecánica Vectorial para Ingenieros, Tomo I, Estática**

Beer y Johnson: **Mecánica Vectorial para Ingenieros, Tomo II, Dinámica**

Burghardt y Axelrod: **Manejo de las Máquinas Herramientas, Parte I, 5a. ed.**

Burghardt y Axelrod: **Manejo de las Máquinas Herramientas, Parte II, 4a. ed.**

Crandall y Dahl: **Introducción a la Mecánica de los Sólidos**

Ham, et al.: **Mecánica de Máquinas, 4a. ed.**

McAdams: **Transmisión de Calor, 3a. ed.**

Obert y Gaggioli: **Termodinámica, 2a. ed.**

Reynolds: **Termodinámica**

Shames: **La Mecánica de los Fluidos**

Shigley: **El Proyecto en Ingeniería Mecánica**

Shigley: **Teoría de las Máquinas (en prensa)**

Stoecker: **Refrigeración y Acondicionamiento de Aire**

Streeter: **Mecánica de los Fluidos, 4a. ed.**

Synge y Griffith: **Principios de Mecánica, 3a. ed.**

Young: **Fundamentos de Mecánica y Calor**

Ingeniería Civil

Dunham: **Cimentaciones de Estructuras, 2a. ed.**

Hickerson: **Levantamientos y Trazado de Caminos, 5a. ed.**

Kissam: **Topografía para ingenieros**

Peurifoy: **Encofrados para Estructuras de Hormigón**

Wang y Eckel: **Teoría Elemental de Estructuras**

Ingeniería Hidrológica

Linsley, et al.: **Hidrología para Ingenieros**

NEGOCIO

Allen: **La Función Directiva como Profesión**

Backer y Jacobsen: **Contabilidad de Costos: Un Enfoque Administrativo y de Gerencia**

Bittel: **Lo que Todo Supervisor Debe Saber**

Black y Ford: **Dirección Operacional: Guía para Actuación Supervisora Competente**

Fein, et al.: **Técnica de la Organización de Almacenes**

Harbison y Myers: **La Dirección de Empresa en el Mundo Industrial: Un Análisis Internacional**

Horowitz: **Introducción al Análisis Cuantitativo de los Negocios**

Johnston: **Análisis Estadístico de Costes**

Kepner y Tregoe: **El Directivo Racional (en prensa)**

Koontz y O'Donnell: **Curso de Administración Moderna, 3a. ed.**

Levitt: **Innovaciones en "Marketing" Nuevas Perspectivas de Beneficio y Crecimiento**

Lindsay: **Técnicas Modernas de Gestión**

Miller: **Aplicación del Método PERT al Control de Programación, Costes y Beneficios**

Moore: **Control de la Producción, 2a. ed.**

Scott, et al.: **Dirección de Personal, 6a. ed.**

CIENCIAS SOCIALES

Economía

Bryce: **Desarrollo Industrial: Guía para Acelerar el Crecimiento Económico.**

Kindleberger: **Desarrollo Económico, 2a. ed.**

Powelson: **América Latina: La Revolución Económica y Social Actual**

Thoman: **Geografía de la Actividad Económica**

Walinsky: **Planificación y Realización del Desarrollo Económico**

Educación, Psicología, Filosofía y Sociología

Benjamin: **La Educación Superior en las Repúblicas Americanas**

Horton y Hunt: **Sociología**

Hurlock: **Desarrollo Psicológico del Niño, 4a. ed.**

Maher: **Principios de Psicopatología (en prensa)**

Morgan: **Psicología Fisiológica, 3a. ed.**

Royce: **¿Qué Soy Yo? Un Estudio Filosófico-Psicológico de la Naturaleza Humana**

BIBLIOTECA PARA EL HOMBRE ACTUAL

Aranguren: **Sociología de la Comunicación**

Beck: **Palabras y Ondas**

Bhagwati: **La Economía de los Países Subdesarrollados**

Caute: **Las Izquierdas Europeas**

Chauvin: **El Mundo de los Insectos**

Dresden: **Humanismo y Renacimiento**

Edholm: **La Biología del Trabajo**

Forrest: **La Democracia Griega**

Freudenthal: **Las Matemáticas en la Ciencia y la Vida Cotidiana**

Gouiran: **Partículas y Aceleradores**

Gregory: Ojo y Cerebro

Hall: Las Grandes Ciudades y Sus Problemas

Hingley: Los Escritores Rusos y Su Mundo

Huard y Wong: La Medicina China

Kamen: Los Caminos de la Tolerancia

Kaufmann: Investigación Operacional

Kuczynski: La Evolución de la Clase Obrera

Madsen: Art Nouveau

Mendelssohn: La Búsqueda del Cero Absoluto

North: El Comunismo Chino

Sampedro: Las Fuerzas Económicas de Nuestro Tiempo

Tinbergen: Plan de Desarrollo

Ucko y Rosenfeld: El Arte Paleolítico

Vaizey: La Educación en el Mundo Moderno

LIBROS GREGG PARA EDUCACION COMERCIAL

Acuña: Correspondencia y Documentación Comercial Moderna

Gorbea: Técnicas Mecanográficas Modernas 2a. Ed.

Gregg: Estudios de Rapidez en Taquigrafía Gregg Simplificada

Gregg: Clave de Estudios de Rapidez en Taquigrafía Gregg Simplificada

Gregg: Clave del Curso de Taquigrafía Gregg

Gregg: Curso de Taquigrafía Gregg

Gregg: Taquigrafía Gregg Simplificada

Gregg: Clave de Taquigrafía Gregg Simplificada

Gregg: Diccionario de la Taquigrafía Gregg Simplificada

Gregg: Auxiliar de la Taquigrafía Gregg Simplificada con Clave

Gregg: Frases y Palabras en Taquigrafía Gregg, ED

Gregg: Clave de Taquigrafía Gregg ED, Primer Curso

Gregg: Manual del Maestro de Taquigrafía Gregg ED, Primer Curso

Gregg: Taquigrafía Gregg ED, Primer Curso

Gregg: Taquigrafía Gregg II, ED

Gregg: Clave de Taquigrafía Gregg II, ED

Gregg: Manual del Maestro de Taquigrafía Gregg II, ED

Kahn: Juego Práctico de Archivo

Kahn: Clave del Juego Práctico de Archivo

Lista Blanco: Clave de Matemáticas Mercantiles 2a. ed.

Lista Blanco: Matemáticas Mercantiles 2a. ed.

Lugo: Auxiliar de la Taquigrafía Gregg

O'Neill: La Psicología en la Correspondencia Comercial

Revilla: Gramática Española Moderna

Revilla: Gramática Española Moderna, Manual del Maestro

Robinson: Organización y Administración de Negocios

Robinson: Manual del Maestro para Organización y Administración de Negocios

Rosenberg: Matemáticas para el Comercio

Rosenberg: Clave de Matemáticas para el Comercio

Rosenberg: Las Matemáticas en la Contabilidad y en la Administración de Empresas

Rosenberg: Manual del Maestro para Las Matemáticas en la Contabilidad y en la Administración de Empresas

Sferra: Personalidad y Relaciones Humanas

Sferra: Manual del Maestro para Personalidad y Relaciones Humanas

Sorelle: Mecanografía Método Racional 2a. ed.

Uribe: Manual del Maestro para Prácticas de Oficina

Uribe: Prácticas de Oficina

Vivas: Fundamentos de Correspondencia Comercial

Winger: Mecanografía Gregg I

Winger: Cuaderno de Trabajos para Mecanografía Gregg I

Winger: Clave de Mecanografía Gregg I

Zoubek: Dictados de Rapidez y Transcripción para Taquigrafía Gregg

SERIE LA COCINA

Comprensión de los Términos Culinarios
Cómo Comprar los Alimentos Inteligentemente
Seguridad en la Cocina
La Organización y Preparación de las Comidas
Cómo Planear Comidas Nutritivas
Cómo Medir con Exactitud
Cómo Servir las Comidas Atractivamente

SERIE EL CUIDADO DEL NIÑO

El Baño del Bebé
Preparación de la Leche
Alimentación del Niño
Selección de la Ropa del Niño
Selección de Juguetes para el Niño
La Enseñanza de Buenos Hábitos

SERIE DE LA SALUD

Usted y Su Ropa
Pesky, El Microbio del Resfriado
Usted y Su Alimentación
Su Postura, ¿Buena o Mala?
Bacterias, Buenas y Malas
Plagas de Insectos y Enfermedades

SERIE SOBRE LOCUCION

Discusión en Grupos (12 min.)
Utilizando Ayudas Visuales en Pláticas (14 min.)





• Aunque algunos de los fundamentos de la estática de los cuerpos rígidos eran ya conocidos por los científicos de la antigua Grecia, no se presentó atención seria al problema de las deformaciones ni aún de las estructuras más sencillas hasta los tiempos del Renacimiento. Entonces, Leonardo da Vinci (1452 -1519) y más tarde Galileo (1564 - 1642) se interesaron en la estática de los cuerpos deformables y en las propiedades mecánicas de los materiales corrientes de la ingeniería.

• Cronológicamente, el desarrollo de la resistencia de materiales ocurrió casi totalmente después del desarrollo de las leyes de la estática. Esta consideraba los efectos externos de una fuerza que actúa sobre un cuerpo, esto es, la tendencia de las fuerzas a cambiar el estado del movimiento del cuerpo. La resistencia de materiales trata de los efectos internos de la fuerza, es decir, el estado de tensión y de deformación producido dentro de los límites del cuerpo.




ISBN: 968-422-922-4



ISBN 968-422-922-4